

**Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la  
Enseñanza para la Comprensión**

**PAULA ANDREA RENDÓN MESA**

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA  
MEDELLÍN  
2009

# **Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión**

Este trabajo se enmarca en el programa de Maestría en Educación, con énfasis en la docencia de las Matemáticas, de la Universidad de Antioquia en convenio con la Universidad Eafit.

**PAULA ANDREA RENDÓN MESA**

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemáticas.

Asesor

Ph. D. PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA  
MEDELLÍN  
2009

*“No hay deber más necesario que el de dar las gracias.”*

Cicerón

*A mi mamá y a Mite.*

Nota de aceptación

---

---

---

---

Presidente del Jurado

---

Jurado

---

Jurado

# Índice general

---

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
<b>1. La razón de cambio, objeto de investigación</b>	<b>1</b>
1.1. El concepto de razón de cambio a través de la historia . . . . .	1
Los babilonios y egipcios . . . . .	2
Los griegos . . . . .	2
La baja edad media . . . . .	4
Inicios del cálculo diferencial . . . . .	7
La geometría analítica y el cálculo diferencial . . . . .	9
1.2. Concepciones del cambio . . . . .	10
1.2.1. El cambio cualitativo . . . . .	11
1.2.2. El cambio cuantitativo . . . . .	12
El cambio constante . . . . .	14
El cambio variable . . . . .	15
1.2.3. La razón de cambio . . . . .	15
La razón de cambio constante . . . . .	16
La razón de cambio variable . . . . .	18
1.3. El pensamiento variacional y la razón de cambio . . . . .	19
1.3.1. la variación y el cambio en el currículo colombiano . . . . .	20
1.3.2. La razón de cambio en el ciclo básico escolar . . . . .	23
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>25</b>
2.1. Teorías del aprendizaje . . . . .	25
2.1.1. Aprendizaje significativo de David Ausubel . . . . .	26
2.1.2. Taxonomía de Bloom . . . . .	30
2.1.3. Resolución de problemas de Polya . . . . .	32
2.1.4. Inteligencias Múltiples . . . . .	33
2.2. Modelos educativos relacionados con la comprensión . . . . .	35
2.2.1. Modelo Educativo de van Hiele . . . . .	36

El Insight . . . . .	37
Los niveles de razonamiento . . . . .	37
Las fases de aprendizaje . . . . .	39
2.2.2. Modelo de entendimiento de Pirie y Kieren . . . . .	40
Características del Modelo de Pirie y Kieren . . . . .	41
2.3. Enseñanza para la Comprensión . . . . .	41
2.4. Investigaciones sobre la razón de cambio o temáticas relacionadas . . . .	43
2.4.1. J. Villa y F. Posada . . . . .	43
2.4.2. L. Camargo y A. Guzmán . . . . .	44
2.4.3. C. Azcarate . . . . .	45
2.4.4. J. Cortés Z. . . . .	46
2.5. Problema de investigación . . . . .	46
2.6. Objetivos investigativos . . . . .	48
2.6.1. Objetivo General . . . . .	48
2.6.2. Objetivos Específicos . . . . .	49
<b>3. Marco metodológico . . . . .</b>	<b>51</b>
3.1. La Enseñanza para la Comprensión . . . . .	51
3.1.1. Dimensiones . . . . .	52
Las redes conceptuales . . . . .	53
Métodos de producción de conocimiento . . . . .	53
La praxis . . . . .	54
La comunicación . . . . .	55
3.1.2. Elementos . . . . .	56
Hilos conductores o metas de comprensión abarcadoras . . . . .	56
Tópicos generativos . . . . .	57
Desempeños de Comprensión . . . . .	58
Valoración continua y evaluación final . . . . .	59
3.2. Propuesta metodológica . . . . .	60
3.2.1. Hilo conductor . . . . .	61
3.2.2. Tópicos generativos . . . . .	61
3.2.3. Metas de Comprensión . . . . .	62
3.2.4. Fases de desempeños de comprensión . . . . .	63
Fase de exploración . . . . .	64
Fase de investigación guiada . . . . .	64
Fase del proyecto final de síntesis . . . . .	64
3.2.5. Valoración Continua y evaluación final . . . . .	65
Criterios para la valoración continua y evaluación final . . . . .	66
El portafolio . . . . .	67
3.3. Herramientas metodológicas . . . . .	70
3.3.1. La guía de actividades . . . . .	70

3.3.2.	Los test o encuestas de conocimiento . . . . .	71
	El pre-test y el post-test . . . . .	72
3.3.3.	Mapas Conceptuales . . . . .	72
	Los mapas conceptuales como ruta de aprendizaje . . . . .	73
	Los mapas conceptuales para extraer significados y/o sintetizar . . . . .	74
	Mapas conceptuales con fines evaluativos . . . . .	75
3.3.4.	Matrices de evaluación . . . . .	75
<b>4.</b>	<b>Aplicación de la estrategia metodológica</b>	<b>85</b>
4.1.	Aplicación del pre-test . . . . .	85
4.2.	Aplicación de la guía de actividades . . . . .	89
4.2.1.	Actividades de la fase de exploración . . . . .	90
	Actividad No. 1: ¿Qué es un cambio? . . . . .	92
	Actividad No 2: ¿Hay Variaciones? . . . . .	95
	Actividad No 3: Mezcla de colores . . . . .	97
	Actividad No 4: Mediciones de temperatura . . . . .	99
	Actividad No 5: ¿Cuánto crece? . . . . .	101
4.2.2.	Actividades de la fase de investigación guiada . . . . .	106
	Actividad No 1: El cambio climático . . . . .	106
	Actividad No 2: ¿Cuánto cada cuánto? . . . . .	109
	Actividad No 3: El triángulo que cambia . . . . .	111
	Actividad No 4: distancia, tiempo y velocidad . . . . .	114
4.2.3.	Actividades de la fase del proyecto final de síntesis . . . . .	117
	Tabla con relación al crecimiento del feto durante el embarazo . . . . .	120
	Tabla con relación al peso del feto durante el embarazo . . . . .	121
	Actividad No 1: ¿Qué varía? . . . . .	124
4.3.	Resultados del post-test . . . . .	126
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>135</b>
5.1.	Descripción de los niveles de comprensión . . . . .	136
5.1.1.	Análisis de las matrices de evaluación . . . . .	136
	La verbalización . . . . .	136
	La conceptualización . . . . .	138
	La solución del problema . . . . .	139
5.1.2.	Análisis de los pre-test y post- test . . . . .	140
	La verbalización . . . . .	140
	La conceptualización . . . . .	141
	La experiencia de enseñanza y de aprendizaje . . . . .	141
5.1.3.	Análisis de los mapas conceptuales . . . . .	142
5.2.	Conclusiones con relación al cumplimiento de los objetivos . . . . .	142
5.2.1.	General . . . . .	142

5.2.2. Específicos . . . . .	143
5.3. Aspectos para resaltar de la experiencia . . . . .	145
5.4. Divulgación del trabajo de investigación . . . . .	145
5.4.1. Artículos . . . . .	145
5.4.2. Ponencias . . . . .	146
5.4.3. Futuras líneas de investigación . . . . .	146
<b>A. Guía de actividades</b>	<b>149</b>
A.1. Hilo conductor . . . . .	149
A.2. Actividades de la fase de exploración . . . . .	149
A.2.1. Desempeños de comprensión . . . . .	149
Actividad No. 1: ¿Qué es un cambio? . . . . .	150
Actividad No 2: ¿Hay variaciones? . . . . .	151
Actividad No 3: Mezcla de colores . . . . .	152
Actividad No 4: Mediciones de temperatura . . . . .	153
Actividad No 5: ¿Cuánto crece? . . . . .	155
A.3. Actividades de la fase de investigación guiada . . . . .	156
A.3.1. Desempeños de comprensión . . . . .	156
Actividad No 1: El cambio climático . . . . .	157
Actividad No 2: ¿Cuánto cada cuanto? . . . . .	157
Actividad No 3: El triángulo que cambia . . . . .	158
Actividad No 4: distancia, tiempo y velocidad . . . . .	162
A.4. Actividades de la fase del proyecto final de síntesis . . . . .	164
A.4.1. Desempeños de comprensión . . . . .	164
Actividad No 1: ¿Qué varía? . . . . .	165
<b>B. El pre - test</b>	<b>169</b>
<b>C. El post - test</b>	<b>173</b>
<b>D. Pautas para elaborar el proyecto final de síntesis</b>	<b>177</b>
<b>E. ¡Un calor achicharrante!</b>	<b>179</b>
<b>F. Artículo</b>	<b>181</b>



# Índice de figuras

---

1.1. Gráfico explicativo de la ley del plano inclinado. . . . .	5
1.2. Gráfico explicativo diferencia entre velocidades de Oresme. . . . .	6
1.3. Método de adigualdad de Fermat. . . . .	8
1.4. Registro gráfico de la velocidad como razón de cambio constante. . . .	17
1.5. Representación gráfica de la pendiente como razón de cambio constante.	17
1.6. Curva con rectas tangentes. . . . .	18
2.1. Gráfico explicativo taxonomía de Bloom. . . . .	32
2.2. Modelo de entendimiento de Pirie y Kieren . . . . .	41
3.1. La Enseñanza para la Comprensión. . . . .	69
3.2. Diagrama de la composición de la guía de actividades. . . . .	71
4.1. Mapa Conceptual utilizado como ruta de aprendizaje. . . . .	91
4.2. Socialización de las entrevistas. . . . .	94
4.3. Mapa conceptual para socialización actividad No. 1 . . . . .	95
4.4. Experiencia con la mezcla de colores. . . . .	98
4.5. Gráfica de aumento y disminución de la temperatura. . . . .	100
4.6. Experiencia con el frijol, ¿Cuánto crece? . . . . .	104
4.7. Mapa conceptual de estudiantes . . . . .	105
4.8. Gráfica del calentamiento global . . . . .	108
4.9. Registro gráfico galones vs precio. . . . .	110
4.10. Actividad sobre las variaciones de la altura y la base de un triángulo. .	111
4.11. Registro gráfico de la variación del área de un triángulo. . . . .	112
4.12. Registro gráfico de la variación del área. . . . .	114
4.13. Gráfica distancia vs tiempo. . . . .	115
4.14. Gráfica distancia vs tiempo. . . . .	115
4.15. Actividad con la calculadora. . . . .	117
4.16. Gráfica de la altura en la evolución del hombre. . . . .	118
4.17. Exposición del proyecto final de la altura en la evolución del hombre. .	119
4.18. Registro gráfico del tamaño que alcanza un bebé en gestación. . . . .	120

4.19. Registro gráfico del peso que alcanza un bebé en gestación. . . . .	121
4.20. Maqueta sobre los cambio de un bebé gestante . . . . .	122
4.21. Mapa conceptual como herramienta evaluativa . . . . .	123
4.22. Registro gráfico tiempo utilizado para ensamble de piezas. . . . .	126
5.1. Representación de los niveles de comprensión - Verbalización . . . . .	137
5.2. Representación de los niveles de comprensión - Conceptualización . . .	138
5.3. Representación de los niveles de comprensión - Solución del problema .	139
A.1. La respuesta a esta pregunta implica reconocer los contextos. . . . .	150
A.2. Los terremotos y otras situaciones reales permiten determinar cambios.	151
A.3. El cambio de color, ¿Un cambio de qué tipo? . . . . .	152
A.4. ¿Qué sucede con la temperatura? . . . . .	153
A.5. Plano 1 y 2 para graficar tabla 1 y 2 . . . . .	154
A.6. Descripción del crecimiento de una planta. . . . .	155
A.7. ¿Que ocurre con el clima? . . . . .	157
A.8. Saber cuánto varía algo, está asociado a la razón de cambio. . . . .	157
A.9. Variaciones en un triángulo. . . . .	158
A.10. Gráfica de la calculadora. . . . .	159
A.11. Plano para graficar tabla del área del triángulo variando la base. . . .	160
A.12. Plano para graficar tabla del área del triángulo variando la altura. . .	161
A.13. La velocidad como razón de cambio. . . . .	162
A.14. Plano para gráfica de distancia vs. tiempo. . . . .	162
A.15. Plano para la gráfica que aparece en la calculadora. . . . .	163
A.16. Es necesario reconocerlas las variaciones. . . . .	165
A.17. Gráfica de la razón de ensamble por trabajador. . . . .	166

# Índice de cuadros

---

2.1. Situaciones de aprendizaje y la forma de adquirir la información. . . . .	27
2.2. Situaciones de aprendizaje y la estructura cognitiva. . . . .	28
2.3. Dimensiones de la EpC. . . . .	42
2.4. Elementos de la EpC. . . . .	43
3.1. Las dimensiones de la EpC en relación a los criterios de evaluación. . .	78
3.2. Items para evaluar la verbalización. . . . .	81
3.3. Items para evaluar la conceptualización de la razón de cambio. . . . .	82
3.4. Items para evaluar la solución al problema seleccionado. . . . .	83
4.1. Registro de temperatura en aumento. . . . .	99
4.2. Registro de la disminución de la temperatura. . . . .	99
4.3. Registro tabular tiempo vs crecimiento de la planta. . . . .	103
4.4. Descripciones sobre el calentamiento global. . . . .	107
4.5. Registro tabular de los alumnos de la gráfica de calentamiento global. .	108
4.6. Cálculo de la razón de cambio. . . . .	109
4.7. Cálculo del área del triángulo variando la base. . . . .	112
4.8. Cálculo de la razón de cambio entre el área y la base del triángulo. . .	113
4.9. Cálculo del área del triángulo variando la altura y fijando un cateto. . .	113
4.10. Tabla de datos distancia vs tiempo. . . . .	116
4.11. Registro tabular altura de evolución vs año. . . . .	118
4.12. Registro tabular del crecimiento de un bebé en gestación. . . . .	120
4.13. Registro tabular del peso de un bebé en gestación. . . . .	121
4.14. Razón de cambio de la población. . . . .	124
4.15. Razón de ensamble de una pieza por trabajador. . . . .	125
5.1. Análisis de los test con relación a la verbalización. . . . .	140
5.2. Análisis de los test con relación a la conceptualización. . . . .	141
5.3. Análisis de los test con relación a la solución de problemas. . . . .	141
A.1. Registro de temperatura en aumento . . . . .	153
A.2. Registro de temperatura en disminución . . . . .	154

A.3. Descripción cualitativa y cuantitativa del crecimiento de una planta. . .	156
A.4. Cálculo de la razón de cambio. . . . .	158
A.5. Cálculo del área del triángulo variando la base. . . . .	159
A.6. Cálculo de la razón de cambio entre el área y la base del triángulo . . .	160
A.7. Cálculo del área del triángulo variando la altura. . . . .	161
A.8. Tabla de datos distancia vs tiempo. . . . .	163
A.9. Razón de cambio de la población. . . . .	165
A.10. Razón de ensamble de una pieza por trabajador. . . . .	166

# Agradecimientos

---

Este trabajo de investigación implica un avance muy significativo tanto en mi vida académica como profesional, pero fue un esfuerzo en conjunto con seres que estuvieron muy cerca y contribuyeron de muchas formas. Es por ello que rindo un tributo y agradezco de manera especial:

- A Dios, que lo permite todo.
- Al Doctor Pedro Vicente Esteban Duarte, mi asesor, quien hizo posible que este trabajo de investigación se pudiera llevar a cabo por el compromiso y dedicación asumidos.
- A los alumnos participantes de la experiencia, que con su talento, capacidad creativa y motivación, me permitieron la implementación de la estrategia metodológica y trabajaron incansablemente para lograr el producto de esta investigación.
- A la Universidad de Antioquia y a la Universidad Eafit, que a través del grupo de investigación **Educación Matemática e Historia (Udea-Eafit)**, apoyaron el trabajo realizado en esta Tesis.
- A todos los docentes formadores del programa de Maestría, en especial al Doctor Carlos Mario Jaramillo, coordinador de la línea de Educación Matemática, que con su presencia continua permitió, que aún en los momentos más difíciles, siguiera adelante y perseverara.
- A mis directivos docentes y compañeros de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas (Ant), por permitir que la propuesta de investigación se llevara a cabo.
- A mi familia, que con su amor, paciencia y comprensión me ayudaron a lograr esta meta.
- A Juan Pablo Mejía Rúa, mi novio, que con su tolerancia y respaldo incondicional, me permitió llevar a cabo este proceso.



# Resumen

---

En los últimos diez años en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional, se ha preocupado por definir los términos de una renovación curricular para el área de las matemáticas, proponiendo los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de esta área, con el fin de fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural de otras o de la misma ciencia. Esta circunstancia, propende a que la experiencia vivida en el aula, se descentre de desarrollos procedimentales y algorítmicos que han traído como consecuencia un aprendizaje mecánico de las matemáticas, desligado de los contextos y limitado al transmisionismo.

Desde esta visión, esta investigación propone realizar una descripción y análisis a una propuesta, que busca cargar de significado conceptual y contextual, la razón de cambio, esto a partir de los fundamentos de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). Se asume esta metodología, ya que su flexibilidad para establecer relaciones entre un campo específico y el contexto es bastante amplia, lo que la convierte en un recurso que cambia las perspectivas del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

La investigación fue realizada con un grupo de estudiantes de grado noveno (9º) de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas (Ant), con ellos se implementó una guía de actividades que vinculó las concepciones del cambio (cualitativo y cuantitativo) con situaciones reales. Los estudiantes para el desarrollo de estas actividades se apoyaron en representaciones geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas que dieron pie al desarrollo comprensivo de este concepto.

Para dar cuenta de este logro, el análisis se realiza con base en las herramientas metodológicas definidas: los tests, las matrices de evaluación y los mapas conceptuales. El contraste entre los test (pre-test y post-test) posibilitó la percepción de cambios con respecto a la verbalización, la conceptualización y la solución de problemas planteados con relación al concepto objeto de estudio. Las matrices de evaluación describieron los logros de los estudiantes ubicándolos en los diferentes niveles de comprensión y los mapas conceptuales permitieron la exploración del lenguaje empleado por ellos,

demostrando sus avances y que se hiciera así, un mejor seguimiento y evaluación de las nuevas relaciones conceptuales que iban generando los participantes del proceso.



---

## Capítulo 1

# La razón de cambio, objeto de investigación

---

**E**N este capítulo se presenta una reseña histórica sobre el cambio y la razón de cambio como resultado de la medición del mismo en diferentes épocas, hasta llegar a la forma como se realiza en nuestros días. Al mismo tiempo, desde las consideraciones conceptuales asumidas, iniciamos una categorización del objeto de estudio, es decir, se describen las diversas manifestaciones del cambio asociadas a lo cualitativo, cuantitativo, constante y variacional.

Se expone la relación de esta temática con el pensamiento variacional en el currículo colombiano, definiendo el nivel escolar en el que se realizó el trabajo de investigación, y cómo se presenta este tema de enseñanza de acuerdo con los lineamientos oficiales para contrastarlo con el método propuesto.

### 1.1. El concepto de razón de cambio a través de la historia

Desde la antigüedad, el hombre ha tenido la necesidad de entender los cambios percibidos en su entorno para utilizarlos en su favor y transformar el medio ambiente. En esta sección se realiza un rastreo histórico del concepto de razón de cambio y se describe como se percibe este concepto en diferentes épocas.

### Los babilonios y egipcios

En esta época, la concepción de la matemática era eminentemente práctica, y por ello lograron establecer, hace más de 3000 años, relaciones entre las variaciones de las diversas magnitudes que estudiaban, en un principio de forma **cualitativa**, describían los cambios de su entorno con relación al universo. Posteriormente fueron **cuantitativas**, debido a que en ellas registraban valores cambiantes de obras arquitectónicas, como las pirámides egipcias, que requerían de patrones de medida constantes. Estas son pruebas fehacientes de la preocupación por encontrar y mantener regularidades en las medidas, y del sentido práctico de variación. En la construcción de las pirámides, el problema para estas civilizaciones consistía en mantener “una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las cuatro caras de la pirámide. Se solía utilizar la relación avance Vs subida, denominándola por la palabra *seqt*, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura” [8, p. 11].

### Los griegos

Esta civilización comenzó a trabajar las matemáticas más por interés intelectual, que por resolver problemas de la vida práctica. Este trabajo produjo un gran avance en la geometría, sobre todo por convertir en objeto de estudio aquello que anteriormente se trabajaba de manera empírica. Dentro del estudio teórico realizado por los griegos se encuentran los avances de Tales de Mileto, realizados hacia el año 585 a. C., sobre las proporciones, estudios que se constituyeron en la génesis de la matematización de las comparaciones entre medidas geométricas de segmentos. “Aunque es probable que Tales haya basado sus estudios en principios conocidos por los egipcios y babilonios, con estos estudios nacen los conceptos de razón geométrica o comparación entre magnitudes geométricas, y de proporción, como herramientas ideales para analizar cuantitativamente relaciones entre magnitudes” [8, pp. 48-52].

Al desarrollar su teoría de la semejanza, Tales de Mileto formula que *los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, son proporcionales*, proposición que permite generalizar la regularidad encontrada al modificar el tamaño de los lados de triángulos semejantes y que expresó en términos de razones constantes. La utilidad práctica de su teoría se hizo manifiesta al utilizarla en la toma de medidas indirectas cuando logró calcular la altura de una de las pirámides egipcias comparando su sombra con la de una vara vertical. “En general, Tales buscaba un método indirecto para acceder a aquello que en la práctica no era posible” [41, pp. 74 - 94].

Con el nacimiento de la escuela pitagórica, que se fundamentaba en que “*todo es número*”, se transformó la visión de la matemática en una ciencia completamente

intelectual. Desde esa perspectiva, el desarrollo de su teoría de las proporciones estaba centrada en mostrar la armonía cósmica a través del establecimiento de razones numéricas entre cantidades discretas y la comparación entre éstas, para establecer proporciones. “Los pitagóricos establecieron, en términos de la teoría de números y específicamente haciendo alusión a la divisibilidad, en qué casos cuatro números estaban en proporción  $a : b :: c : d$ ” [8, pp. 60 - 61].

Eudoxo (408? - 355? a.C.), matemático perteneciente a la escuela de Platón, reformuló la teoría de las proporciones y su definición es la que utiliza Euclides en el libro V de la siguiente forma:

“Las magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.”

Esta definición, [8, p. 99] retoma la idea de razón entre medidas geométricas y aclara que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  si y solo si, dados dos números naturales  $m$  y  $n$ , sucede que si  $ma < nb$  entonces  $me < nd$ , o si  $ma = nb$  entonces  $me = nd$ , o si  $ma > nb$  entonces  $me > nd$ . Eudoxo se preocupó también por aclarar que las magnitudes tienen que ser del mismo tipo; según él, un segmento no puede compararse en términos de razón con un área, ni un área puede compararse con un volumen, dando lugar a la restricción que se conservaría hasta el surgimiento del cálculo del establecimiento de razones homogéneas.

En su libro Elementos, Euclides (300? a. C.), oficializa la división establecida por sus antecesores entre la aritmética, o teoría de números, y la geometría o estudio de magnitudes. Euclides hace dos tratamientos diferentes a las proporciones, una para los números y otra para las magnitudes. En los libros VII y VIII, dedicados a la aritmética, se refiere a las razones numéricas en el sentido pitagórico, mientras que en los libros III y V se refiere a las razones entre magnitudes geométricas como “una razón es cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo” [8]. De esta definición se deriva la clasificación de éstas en magnitudes conmensurables e inconmensurables.

Arquímedes (287 - 212 a. C.), hace uso de la razón geométrica para derivar las fórmulas para el área y el volumen de diversas figuras planas y sólidos regulares. “El trabajo matemático de Arquímedes se constituye en una excepción al tratamiento dado a la matemática por los griegos, pues se preocupó por problemas prácticos como la determinación de áreas y volúmenes y por el estudio de curvas engendradas por movimientos. No sólo determinó las fórmulas antes mencionadas, como contribución a

la resolución de problemas, sino que utilizó la matemática en la confección de máquinas para el trabajo científico y para la guerra” [24].

Este gran matemático estudio los lugares geométricos de puntos, en donde, hace una caracterización de la espiral, que lleva su nombre, en términos de composición de movimientos:

“Si una línea recta trazada en un plano gira un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y vuelve a la posición inicial, mientras que, sobre la línea en rotación, un punto se mueve uniformemente como ella, a partir del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano” [24].

Con este trabajo profundizó en la construcción de líneas tangentes a la espiral, por diferentes puntos de la curva, como forma de caracterización de la velocidad y dirección del movimiento. “Arquímedes realizó un trabajo diferente, respecto del tratamiento matemático usual de la ciencia griega, al discutir la variabilidad de la dirección del movimiento, en términos cuantitativos, aspecto al que los griegos no se dedicaron” [24].

## La baja edad media

Las raíces que originaron un vuelco al pensamiento matemático y lo orientaron en una dirección diferente a la seguida por los griegos, se dieron en esta época (1250 - 1492), hacia la primera mitad del siglo XIV, cuando los matemáticos del colegio de Mentón, se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que está cambiando, como la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado. La relación entre la matemática y la física dio origen a una nueva ciencia: **la cinemática**, que se constituyó en la base del cálculo.

Jordano de Namore (? - 1237) fue el fundador de la escuela medieval de mecánica cuya preocupación central era el estudio de relaciones entre magnitudes físicas. A él se le debe la primera formulación correcta de la ley del plano inclinado:

“La fuerza que actúa en la dirección de un camino inclinado es inversamente proporcional a su inclinación, donde la inclinación viene medida por la razón de un segmento dado del camino inclinado al segmento vertical que intercepta esta parte del camino, la razón de “trayecto recorrido” a la “subida realizada” ” [8, p. 283].

Se usa así la razón geométrica para explicar la constancia de la razón del cambio entre magnitudes, lo que determina la inclinación del plano.

Utilizando un esquema y la notación algebraica moderna para explicar la formulación de Jordano, se observa en la Figura 1.1, que él encontró fue la dependencia entre la fuerza que actúa en la dirección del plano  $Px$  y la razón constante referida a la pendiente del plano, o su inclinación ( $d/h$ ). Esta inclinación se expresa a partir de la razón geométrica entre las medidas de los segmentos respectivos. Se caracteriza así un movimiento de razón de cambio constante, a través de las razones geométricas entre magnitudes.

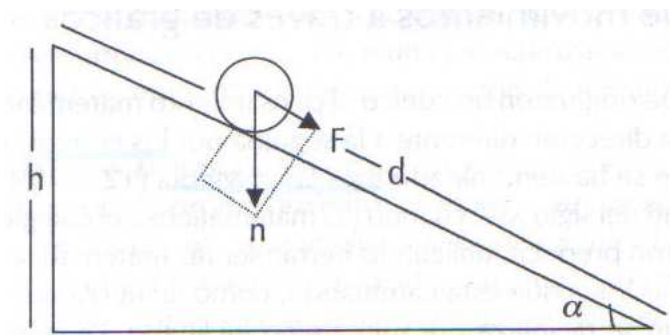


Figura 1.1: Gráfico explicativo de la ley del plano inclinado.

Por otra parte, Nicolás de Oresme (132? - 1382), interesado también en la cuantificación de fenómenos de variación introdujo las representaciones geométricas para explicar relaciones entre magnitudes variantes. Estudiaba la variación de fenómenos físicos uniformes y no uniformes. Para ello, se ideó la representación de la medida de variables físicas por medio de segmentos y el uso de figuras geométricas para describir la variación de una magnitud. Clasificó los movimientos en uniformemente uniformes, uniformemente diformes o diformemente diformes según la figura geométrica que resultara, fuera un triángulo rectángulo, un trapecio, o una figura geométrica con un lado curvo.

Para el caso de un cuerpo con movimiento acelerado, Oresme dibujaba una curva de velocidad vs tiempo en las que los puntos de una recta horizontal representaban los sucesivos instantes de tiempo iguales, que llamó longitudes, y para cada punto trazaba un segmento (al que llamó latitud) perpendicular a la recta horizontal, cuya longitud representaba la velocidad en ese instante. Con argumentos geométricos Oresme mostraba que, para un movimiento uniformemente diforme que parte del reposo, los extremos superiores de todos esos segmentos están en una recta, y la totalidad de los segmentos velocidades cubren el área de un triángulo rectángulo. Así, caracteriza el movimiento donde la velocidad cambia en forma constante, con respecto al tiempo, como un movimiento de razón constante [8, pp. 288 - 290]. Este hecho se traducía, para él, en deducir que su curva tenía pendiente constante. Oresme encontró que la

diferencia entre las velocidades  $v_2 - v_1$ , (a la que denominaba, grado de amplitud) representada por él mediante la diferencia en el tamaño de los segmentos, era la misma que la diferencia entre las velocidades  $v_3 - v_2$ , y así sucesivamente (Figura 1.2). Así, plantea la constancia de las razones entre las diferencias  $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$  y  $\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$ .

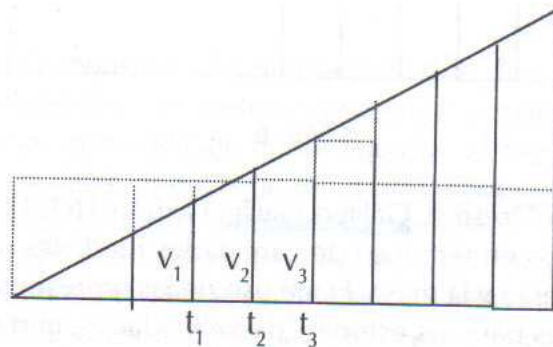


Figura 1.2: Gráfico explicativo diferencia entre velocidades de Oresme.

Por medio de sus dibujos Oresme explicaba el teorema de la velocidad media para cuantificar la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado:

“Un cuerpo uniformemente acelerado a partir del reposo, recorre en un intervalo de tiempo, la misma distancia que recorrería, en el mismo intervalo de tiempo, un segundo cuerpo moviéndose con velocidad constante igual a la mitad de la que llevaría el primer cuerpo al final del intervalo de tiempo en cuestión” [8, p. 291].

Al estudiar movimientos en los que la diferencia de velocidades no es constante, Oresme se dio cuenta que el grado de amplitud (diferencia de velocidades) va disminuyendo a medida que hay un acercamiento al valor máximo de la velocidad, en cuyo entorno el grado de amplitud desaparece casi totalmente. Así, Oresme caracteriza el punto de máxima velocidad como aquel en donde la razón de diferencias entre las velocidades es casi nulo.

Después de Oresme, Galileo Galilei (1564 - 1642), opta por describir el mundo físico en términos de cantidades medibles como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa. Hace uso de las representaciones geométricas de Oresme para los estudios de velocidades, introduciendo técnicas cuantitativas específicas con las cuales llega a la determinación del teorema de velocidad media, que explica haciendo uso de las razones geométricas, que enuncia:

“Una distancia es recorrida por un cuerpo con velocidad uniformemente acelerada, es igual al tiempo en que el mismo espacio sería recorrido por el mismo objeto a velocidad uniforme igual a la velocidad media<sup>1</sup>.

## Inicios del cálculo diferencial

Siguiendo la trayectoria iniciada por los matemáticos del colegio de Merton, la búsqueda de información para el análisis de los fenómenos de estudio, abrió un campo de investigación que intentaba encontrar métodos para caracterizar matemáticamente las curvas, como representativas de las variaciones de las magnitudes a estudiar. Descartes y Fermat desarrollaron, casi simultáneamente, y haciendo uso, por primera vez, de la idea de que por medio de una ecuación se podía expresar la dependencia entre dos cantidades variables, métodos específicos para caracterizar las curvas. Usaron también la idea, heredada de los griegos, de la utilidad de la recta tangente, que posteriormente permitió relacionar los valores de una función, para puntos muy próximos, con los valores de las ordenadas de la recta tangente en los puntos respectivos, de donde posteriormente surge la idea del triángulo diferencial.

En los trabajos de Descartes y Fermat se encuentra expresada, por primera vez haciendo uso de ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes representadas, la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente, en puntos próximos, y la diferencia de los valores correspondientes de la magnitud independiente, es decir, la razón de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto del incremento de la magnitud independiente.

En 1696 el marqués de L'Hôpital publicó un texto, considerado como el primer libro de texto de cálculo, en donde menciona la importancia de las gráficas para representar y caracterizar los cambios de dichas magnitudes. En este texto señala la importancia de lo que llama la diferencia fundamental de una variable continua,  $(f(x + e) - f(x))$  en lenguaje moderno), entendida como la diferencia entre los valores de la magnitud dependiente. Esta diferencia es, como se explica a continuación, la que usan precisamente Descartes y Fermat en sus respectivos trabajos sobre caracterización de curvas. Igualmente señala la importancia de estudiar simultáneamente la diferencia entre los valores correspondientes a la magnitud independiente para lograr conocer la variación de otros elementos presentes en la representación gráfica propuesta. La relación entre ambas diferencias da lugar a la razón de cambio entre los incrementos de las magnitudes, expresada algebraicamente.

El interés inicial de Fermat consistió en encontrar un método general para determinar máximos o mínimos de una curva, puntos en donde la razón de cambio

---

<sup>1</sup>Tomado de <http://historiadelaciencia-mnieto.uniandes.edu.co/pdf/Galileo.pdf>, Marzo de 2007.

entre las magnitudes es casi nula. Este método llamado de adigualdad, en el cual se hace uso de la diferencia fundamental, comenzó a ser desarrollado por Fermat entre 1629 y 1636 y básicamente se centra en tomar en cuenta las características del comportamiento de las magnitudes representadas en una gráfica en valores muy cercanos, incrementando la magnitud independiente. En sus escritos, Fermat no justificó los pasos que seguía, ni siquiera cuando dividía por cero. Su trabajo estaba sustentado en argumentos pragmáticos más que matemáticos y el sólo hecho de que funcionara para resolver problemas le daba credibilidad. Precisamente la falta de claridad acerca de las explicaciones de su método y el éxito de los resultados obtenidos atrajo la atención por parte de la comunidad matemática del momento [8, pp. 381 - 383].

Posteriormente, Fermat utiliza su método de adigualdad para encontrar cómo trazar la tangente a una parábola en un punto dado y, por medio de ello, caracterizar la curva. En este desarrollo, Fermat hace uso del hecho de que si se toma un punto  $P'$  (Figura 1.3) en la curva, y por allí se traza la tangente, la razón de cambio entre las diferencias de ordenadas y abscisas de  $B$  y de un punto  $P$  muy cercano a  $P'$  sobre la tangente, es prácticamente la misma que la razón de cambio entre las diferencias de ordenadas y abscisas de  $P'$  y el punto  $P'$  de la curva, con la misma abscisa que  $P$ . De esta manera llega a determinar la pendiente de la tangente a la parábola en  $P'$ , o sea, la ecuación derivada de la función. Como ya se mencionó, la caracterización de curvas a través de rectas tangentes, era un método utilizado frecuentemente en esta época, inspirado en los estudios de Arquímedes.

Así, Fermat encuentra una forma de determinar el valor del segmento  $TQ'$ , con lo cual ubica las coordenadas del punto  $T$ . Como el punto  $P'$  es conocido, por ser de la parábola, encuentra la pendiente de la tangente a la parábola en  $P'$ , o sea el valor de la derivada de la función en  $P'$ .

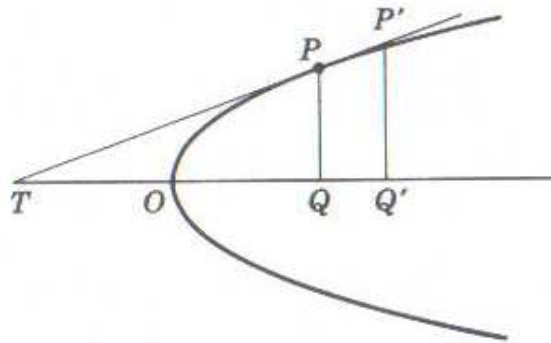


Figura 1.3: Método de adigualdad de Fermat.

Descartes, por su parte, desarrolló un método de construcción geométrica para



caracterizar líneas tangentes a curvas y describir, mediante ellas, los movimientos estudiados, llamado método del círculo. Este método se basó en la construcción previa de la recta normal que fue calificado por el mismo Descartes como “el problema más útil y general que hubiera conocido jamás” [15].

En el tratamiento geométrico realizado por Fermat y Descartes, se hace uso de la razón de diferencias entre magnitudes geométricas o razón de cambio entre magnitudes geométricas, utilizando, en todos los casos, razones de cambio homogéneas.

### La geometría analítica y el cálculo diferencial

Después de los trabajos de Fermat y Descartes, Barrow (1630 - 1677) también trabajó con la intención de caracterizar tangentes pero, a diferencia de sus antecesores, introdujo, según el pensar de los historiadores de la matemática, una interpretación infinitesimal al problema. En su trabajo realizó modificaciones al método de Fermat considerando un arco, “indefinidamente pequeño” [15], que asoció con un trozo de la tangente para construir lo que hoy llamamos triángulo diferencial.

Hacia 1640, Roberval y Torricelli empezaron a introducir interpretaciones cinemáticas de las curvas estudiadas. Por un lado, identificaban la gráfica como la representación de la dependencia de dos magnitudes físicas, y por otro lado, consideraban la tangente en un punto de la curva como la expresión de la razón de cambio de la magnitud dependiente, respecto a la independiente, razón que permitía identificar la dirección del cambio de la magnitud, en ese punto. Esta última idea se constituye en la génesis de la identificación de las relaciones entre la dirección de las tangentes en diferentes puntos de la curva y la caracterización del movimiento en un instante. Con su método, Roberval consiguió determinar tangentes de todas las curvas típicas de la época e introdujo la aceptación de las razones de cambio heterogéneas.

Posterior a estos trabajos surgieron los trabajos de Newton y Leibnitz. Este último trabajó la razón de diferencias que posteriormente se transformó en la razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños, o sea, el diferencial. Más tarde se dio cuenta que esta razón de diferencias le permitía encontrar una ecuación para determinar la inclinación de la recta tangente y encontrar razones de cambio instantáneas.

Los trabajos de Descartes y Fermat llevaron al surgimiento de dos ramas importantes de la matemática. Con el estudio de las razones de diferencias entre magnitudes se dio lugar al estudio de las razones de cambio infinitamente pequeñas y al cálculo diferencial, y con el estudio de las razones de cambio invariantes en el tiempo se dio lugar al surgimiento de la geometría analítica con la caracterización de curvas a través de expresiones algebraicas. Por el primer camino se llegó al concepto de razón de cambio y por el segundo al surgimiento del concepto de pendiente para

caracterizar las ecuaciones lineales.

La aceptación de las razones de cambio heterogéneas rompió con la manera griega de ver las razones y permitió acceder al estudio de los fenómenos de variación entre magnitudes interdependientes. Cada punto de la curva en el plano se desligó de los segmentos asociados como representantes de dicha magnitud (a la manera de Oresme) y empezó a verse como la asociación de dos valores de magnitudes de diferente especie. Así surgen, en el contexto de los estudios variacionales, las razones heterogéneas.

Con el avance del álgebra y la posibilidad de hacer uso de ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes interdependientes, surge la representación de la razones de cambio por medio de razones heterogéneas de diferencias, que se constituyen en la clave para avanzar hacia el cálculo diferencial.

Por otra parte, con el uso de las tangentes para caracterizar curvas se fue gestando el concepto de pendiente en todo el proceso que dio origen a las razones de cambio instantáneas, pero su conceptualización como objeto de estudio se realizó por un camino distinto al del cálculo, en la geometría analítica.

Con lo anteriormente expuesto, se reconoce la importancia que se le da al concepto de razón de cambio y como este ha fundamentado el avance de la matemática desde muchos ámbitos. En el campo educativo vale la pena considerar como actualmente se conceptualiza en el aula de clase, debido a que es el primer lugar donde comienza a tomar significado para los estudiantes. Esta comparación crea la necesidad de implementar alternativas metodológicas con las que los alumnos logren aprender comprensivamente este concepto fundamental para el cálculo y al mismo tiempo abonar el terreno para el pensamiento variacional, necesario para comprender los fenómenos relacionados con las ciencias exactas y naturales.

## 1.2. Concepciones del cambio

El mundo actual está en permanente cambio, generando en el hombre la necesidad de determinar las variaciones ocurridas ya sea desde una descripción de las circunstancias o a partir de la medición de las mismas. “Las condiciones socio-económicas y políticas de países o regiones guardan diversas relaciones entre si, ya sea de similitud, subordinación-dominación o antagonismo, las cuales pueden favorecer ambientes de cooperación, competencia o incluso conflicto, determinando con ello las dinámicas de cambio propias del mundo contemporáneo” [28].

Esta situación conduce a que el cambio se conciba de diferentes forma, es decir desde lo descriptivo o cualitativo y lo numérico o cuantitativo. En las siguientes secciones se

describen estas concepciones y como se asumen en el proceso investigativo.

### 1.2.1. El cambio cualitativo

Cualquier cosa puede ser analizada desde esta perspectiva, pues “Lo cualitativo es aquello que denota cualidad” [20, p. 290]. Puede ser comparada con otra similar, afín o de la misma especie. En muchos casos este análisis dependen de la percepción social, cultural o subjetiva que este en juego. Puede afirmarse que lo cualitativo, depende de quien lo mire y, a diferencia de lo cuantitativo, es mucho más difícil de precisar con especificidad en distintos escenarios y según diversas perspectivas individuales.

En una situación de cambio, se presentan ciertas magnitudes que pueden cambiar o no cambiar en la evolución de las circunstancias iniciales. Es importante identificar estas magnitudes y la relación que existe entre ellas dentro de una situación particular. La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de la manera cómo estas magnitudes se comportan en la situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones de lo que sucederá con los elementos involucrados con el transcurso del tiempo [34, p. 18].

Los cambios cuantitativos, hacen referencia a las relaciones entre factores o componentes que lo producen, es decir, se precisa un antes y un después en la circunstancia respecto a aquellas situaciones que generan la modificación. Este tipo de cambio no se determina numéricamente sino que parte de descripciones, secuencias o instrucciones representados por medio de palabras que permiten definir una respuesta o conclusión sobre algo. Es probable que este tipo de cambios se apoyen en modelos gráficos y expresiones adjetivizadas, las que inician en forma sencilla para luego ser ampliadas y posteriormente poder incluir todos los factores que en la modificación intervienen.

Se espera que en las descripciones de la situación de cambio cualitativo se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, entre otras.

Teniendo presente lo anteriormente expuesto, el cambio cualitativo se caracteriza por:

- Distinguir las características necesarias para identificar modificaciones de un objetos, situación o acción propias de un contexto.
- Permitir representar una situación con una definición pobre (parcial, incierta e/o imprecisa), soportando el proceso de solución y proporcionando una

interpretación de los resultados.

- Ser la forma más ampliamente utilizada para explicar las modificaciones ocurridas respecto a algo, desde el razonamiento por sentido común.

Para poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación se debe disponer de sistemas de representación que sean familiares para el grupo de estudiantes [34, pp. 18 -19]. A continuación se plantean algunos de ellos:

**El lenguaje escrito:** El estudiante debe ser capaz de escribir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones. Es decir que se debería producir un texto para describir lo ocurrido.

**Pictórica:** Los dibujos y gráficos son medios de representación en las situaciones de variación ya que muestran de otra forma lo que el estudiante entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos en un comienzo pueden ser muy concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio. Estos dibujos y gráficos deberían ir acompañados de explicaciones verbales y ayudarán a darle sentido a las gráficas cartesianas de las funciones que describen las situaciones de cambio.

**Modelos físicos que simulen la situación:** Algunas situaciones de cambio, sobre todo las presentadas por medio de un texto, son susceptibles de ser recreadas mediante maquetas con movimiento lo que permite tener un entendimiento más concreto de la situación de cambio. Hablar sobre los modelos y hacer preguntas sobre los mismos ayudan en la identificación de magnitudes presentes.

Es posible que en muchas ocasiones este tipo de descripciones puedan generar que la información suministrada sea muy difícil de manejar por la falta de certeza, es decir impiden llegar a generalidades.

### 1.2.2. El cambio cuantitativo

La noción de medida (valor numérico) viene de la operación cotidiana de comparar conjuntos y no solo se vincula con el número de elementos de un conjunto, sino también con la noción de extensión (largo-corto).

Desde los inicios elementales de la teoría de los conjuntos y de las topologías métricas, hay un inmenso camino recorrido para pulir la noción de medida. Se ha desarrollado la teoría de conjuntos, la noción de métrica y de topología y hoy contamos

con definiciones rigurosas de lo que es la medida como función definida sobre un conjunto. Esta actividad, que consiste en asignar objetivamente un número a alguna observación, ha sido una actividad propia de las Ciencias Naturales desde siempre. “La necesidad de matematizar, cuantificar y predecir los cambios en los fenómenos naturales, obliga a la construcción de modelos que no son más que aproximaciones de la realidad” [19, p. 33].

En muchas situaciones el hombre se ha relacionado no solo con el hecho de medir, sino también con la necesidad de determinar la variación de dichas mediciones. Estas variaciones hacen referencia a los cambios de las medidas, es decir, se relaciona con los cambios cuantitativos. Además pretende definir un número asociado a las modificaciones ocurridas, es decir que, en cualquier circunstancia, sea posible enunciar la cantidad de aumento y/o disminución.

El cambio cuantitativo se describe con base a los factores que lo generan, matemáticamente son llamadas *variables*, los cuales son tomadas como causas, es decir, como relaciones de dependencia que dan cuenta de lo ocurrido. Algunas formas que pueden utilizarse para representar este tipo de cambio son las siguientes [34, pp. 19 - 20]:

**Representación geométrica:** Aparece cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con longitudes de segmentos. Esta identificación no es una mera forma de representación gráfica sino un reconocimiento del comportamiento de la magnitud en cuestión como el de la longitud de un segmento. Es decir, se reconocen propiedades comunes de comportamiento algebraico y continuidad (El comportamiento algebraico y las propiedades de continuidad comunes a las magnitudes continuas son las que dan origen a la definición formal de número real y a su representación geométrica como punto de un eje numérico).

**Representación tabular:** Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Se puede hacer un estudio de esos datos numéricos para encontrar patrones de regularidad. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas y que se ajustan a los datos que sobre los mismos se tienen.

**Representación algebraica:** De acuerdo a los patrones de regularidad encontrados en la tabla se pueden establecer expresiones algebraicas que condensen toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio. Por ejemplo, los valores de las variables para los cuales una expresión o fórmula se anula dan información acerca de los

intervalos donde la expresión es positiva o negativa. Conocer las propiedades de las expresiones algebraicas y poder manipularlas. El estudio de expresiones algebraicas en el contexto de la variación contribuye de manera significativa en el desarrollo del pensamiento algebraico para extraer información sobre el comportamiento de las variables involucradas en la expresión, contribuirá con la comprensión del fenómeno en estudio y será una herramienta para la solución de problemas. La tabla sirve como herramienta para mostrar los datos gráficamente, lo que permite descubrir patrones y hacer predicciones.

**Representación gráfica:** Se hace mediante la representación en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas de los datos de la tabla que consigna las mediciones de las magnitudes involucradas. Se puede así mismo producir la gráfica a partir de las expresiones algebraicas que se obtuvieron de la tabla. Tradicionalmente, la introducción de las funciones numéricas en el aula de clase se ha hecho desde un principio de acuerdo a la complejidad de su expresión algebraica. Es decir, se estudiaban primero las variaciones lineales, luego las cuadráticas, las cúbicas, y así sucesivamente. Quedaba la impresión en muchos estudiantes que las únicas funciones que existían eran las lineales y las cuadráticas, lo que se pretende cambiar con el enfoque que presenta las situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo primero. Esto no quiere decir que a partir de un cierto momento no se haga un acercamiento sistemático al estudio de los fenómenos mediante una clasificación de los modelos de acuerdo a la complejidad de su representación algebraica.

Este tipo de cambio pretende lograr precisión, exactitud y verificación concreta respecto a alguna modificación. El conocimiento gana mucho con estas cualidades porque se hace confiable. El procedimiento que desde el avance matemático ha permitido determinar exactamente la modificación consiste en establecer un punto inicial o de referencia y un punto final y contrastarlos a ambos. En la simbología moderna puede expresarse como:  $\Delta(x) = x_f - x_i$ .

Dependiendo de la situación el cambio cuantitativo, puede ser constante o variable, es decir, puede permanecer igual o generar diferentes resultados numéricos. A continuación se explican sus características.

### El cambio constante

Por constante se entiende un valor de tipo permanente, que no puede modificarse, al menos no dentro del contexto o situación para el cual está previsto. Cuando se hace referencia al cambio constante no es posible alejarse de esta idea pues “El significado coloquial del valor constante le asigna la connotación cuantitativa de no equivocado, y

no-variabilidad; por consiguiente, se supone que un cambio constante no tiene asignado sino un único valor y tiene un alto grado de certeza y confiabilidad. De esta manera se relaciona lo exacto con la verdad, en oposición a la inexactitud que se define como alejamiento sistemático de la verdad” [19, p. 43].

Desde el punto de vista cultural, lo constante también está relacionado con visiones de la matemática; en éstas, lo exacto, lo preciso, es una acepción del término matemático. Estas acepciones lo relacionan con los criterios de validez propios de la matemática, su carácter universal y general; es decir, a los aspectos teóricos que fundamentan la matemática.

Desde el punto de vista matemático, el cambio constante está asociado a:

1. Una medida reconocida como la asignación de valores de cantidades.
2. Un sistemas de representación notacional (propiamente numéricos).
3. Una nociones de precisión y exactitud.

Este tipo de cambio se consigue cuando no se da ninguna modificación de los valores medidos ( $\Delta(x) = 0$ ) o cuando la medida de las diferencias es siempre igual ( $\Delta(x) = x_f - x_i = \text{constante}$ ).

### El cambio variable

Este tipo de cambio es completamente contrario al anterior, pues desde la definición de variable se reconocen las diferencias. Una variable es “una cantidad susceptible de tomar valores numéricos diferentes, comprendidos o no dentro de un cierto límite” [20, p. 1051].

La forma de determinar un cambio de esta forma es la misma que se aplica a los cuantitativos, la diferencia radica en el resultado encontrado, pues aunque se calculen varias modificaciones los resultados no serán iguales.

#### 1.2.3. La razón de cambio

El cambio se matematiza mediante el cálculo, que se considera como la rama de las matemáticas que realiza las operaciones necesarias para prever un resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

La razón de cambio se define como un “cociente incremental o de diferencias” [26, p. 97]. El cociente es definido como el cambio o diferencia en el eje  $Y$  dividido por el respectivo cambio en el eje  $X$ , reconociendo que el cambio se establece hallando la diferencia entre una magnitud final con una inicial. Usando la notación moderna puede escribirse como:  $\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Es importante resaltar que en muchas ocasiones la razón de cambio está dotada de un significado contextual, pues plantea relaciones significantes entre las magnitudes que intervienen.

Este cociente en algunos casos siempre dará el mismo resultado, definiéndose como constante y en caso contrario como razón de cambio variable. En el siguiente apartado se explica cada una de estas razones de cambio y la diferenciación entre ambos.

### La razón de cambio constante

Este tipo de razones al hallar el resultado del cociente, siempre define un mismo resultado. Es decir al calcular la variación de los incrementos se puede obtener siempre un resultado igual a cero o la misma magnitud.

Un ejemplo de este tipo de razones es la velocidad, que se determina como el cociente de incrementos entre la distancia y el tiempo, en escritura notacional se define como:

$$V = \frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta(x)}{\Delta(t)} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$



Si realizamos un registro gráfico de la situación obtendríamos la Figura 1.4:

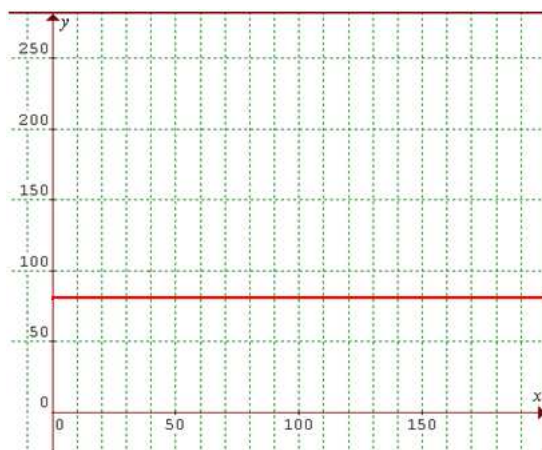


Figura 1.4: Registro gráfico de la velocidad como razón de cambio constante.

Esto recta indica que no existe ningún tipo de variación, lo conduce a establecer la velocidad como constante. Otro situación matemática que hace uso de este concepto es la pendiente de una recta la cual no tiene variación para cualquier par de coordenadas de este elemento geométrico. Gráficamente esta situación se representa en la Figura 1.5.

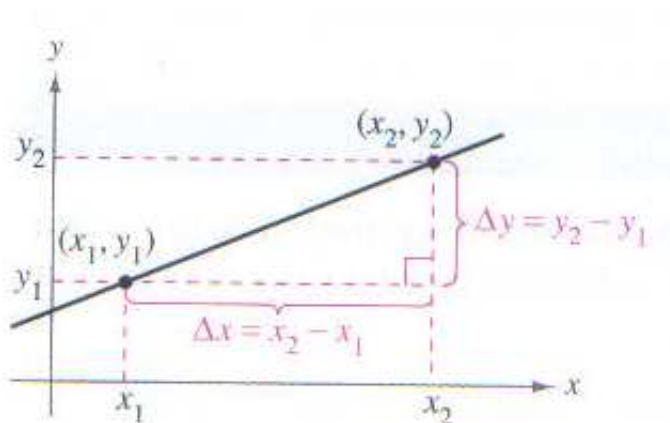


Figura 1.5: Representación gráfica de la pendiente como razón de cambio constante.

Este tipo de razones dentro del cálculo se reconocen como *razón de cambio media o promedio*. Varias situaciones que hacen alusión a este concepto se abordan en el Capítulo 4, sección 4.2.2, expuesto a partir de la página 106.

### La razón de cambio variable

En algunos casos el cambio puede fluctuar durante un intervalo de tiempo, es decir, variar para cada instante donde sea calculado. En este caso se denomina *razón de cambio instantánea*, considerando variaciones cada vez más pequeñas.

En notación funcional se define como:

$$\lim_{\Delta(x) \rightarrow 0} \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \lim_{\Delta(x) \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta(x)) - f(c)}{\Delta(x)}$$

En el cálculo esta escritura hace directa relación a la *pendiente de la recta tangente a una curva* en el punto  $(c, f(c))$ , que se considero como uno de los grandes problemas en los que trabajaron los matemáticos europeos del siglo XVII. Puede considerarse que la recta tangente a una curva en un punto dado tendrá variaciones sobre cualquier punto de la curva en la que quiera establecerse, por tanto se consiguen diferentes resultados y es lo que determina la razón de cambio variable. Gráficamente puede apreciarse en la Figura 1.6 que cada recta tangente a la curva tiene diferente pendiente, lo que permite definir una razón de cambio para cada una de ellas estableciéndose una variación entre las magnitudes halladas.

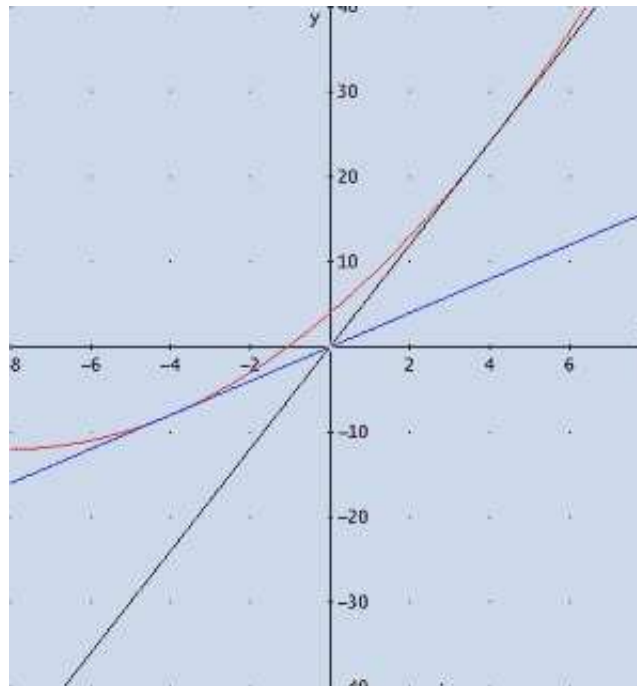


Figura 1.6: Curva con rectas tangentes.

El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir **la derivada**. Este concepto se encarga de determinar el coeficiente de variación de una función en un punto dado. Es decir, provee una formulación matemática de la noción del coeficiente de cambio. El coeficiente de cambio indica lo rápido que crece o decrece una función en un punto (razón de cambio promedio) respecto del eje  $X$ , de un plano cartesiano de dos dimensiones. Pero para cada punto de la curva este coeficiente será diferente, por lo que se determina como *razón de cambio variable*.

Las concepciones frente al cambio, permiten que este concepto sea visionado en un sentido más general. Se reconoce la importancia que puede tener el cambio cualitativo y cuantitativo en el trabajo del aula para lograr la conceptualización de forma reflexiva que conduce al aprendizaje significativo. Desde las directrices ministeriales, la razón de cambio es propia de un nivel de enseñanza y contribuye con el desarrollo del pensamiento variacional. En la siguiente sesión se expone la importancia que tiene el concepto objeto de estudio dentro de las directrices curriculares expuestas por el Ministerio de Educación Nacional.

### 1.3. El pensamiento variacional y la razón de cambio

El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En este sentido, “puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” [48]. Desde esta perspectiva, el contexto se convierte en herramienta que permite el análisis, estudio y modelación de situaciones de variación. Las circunstancias que permiten el desarrollo de este tipo de pensamiento están vinculadas con la matemática, la ciencia y la actualidad del hombre mismo, entre otros escenarios, iniciando así un desarrollo de procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo.

“Una construcción del concepto de variación cognitivamente efectiva presenta dificultades considerables y es, necesariamente, lenta, puesto que supone, por una parte, del dominio e integración de distintos campos numéricos y geométricos, números y magnitudes;  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ , en un caso y todo un mundo de representaciones gráficas para magnitudes continuas, cada una con sus propias especificidades simbólicas, operatorias, estructurales y de representación, junto con la comprensión en profundidad

de procesos específicos complejos, como el paso al límite, la noción de variación y la noción paramatemática de variable, o la articulación del pensamiento predictivo con su eventual matematización” [10, pp. 185 - 187].

Este tipo de pensamiento está relacionado con la razón de cambio puesto “pretende la búsqueda de una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento que implica el conocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y cambio, y por otro lado, se busca la modelación de situaciones a través de funciones como resultado de la cuantificación de la variación” [38, p. 49].

### 1.3.1. la variación y el cambio en el currículo colombiano

A mediados de la década de los años 70's, del siglo pasado, una manera de avanzar en la construcción de un currículo que respondiera a las necesidades del país, fue el “*Programa Nacional de Mejoramiento Cualitativo de la Educación*” [31, p. 105] que tuvo como objetivo general:

“... mejorar cualitativa y cuantitativamente la educación sistematizando el empleo y generación de tecnología educativa para ampliar las condiciones de acceso a la educación en forma equitativa, a toda la población colombiana fundamentalmente de las zonas rurales.”

En el contexto de esta estrategia de renovación curricular, teniendo como sustento los fundamentos Generales del Currículo que integraron aspectos legales, filosóficos, epistemológicos, sociológicos, psicológicos y pedagógicos que permitieron proponer en la educación: “la idea de hombre que se pretendía hacer real; se concibió el conocimiento como proceso y conjunto de experiencias durante toda la vida, transferibles a otras situaciones y presentes en diferentes contextos. Al mismo tiempo los conocimientos y las verdades se consideraron como proyectos que deben revisarse y corregirse permanentemente; el alumno como el centro del proceso y el maestro su orientador y animador. Con esta fundamentación se construyó el marco general de la propuesta de programa curricular de matemáticas” [31]. Es importante reconocer que desde esta idea del currículo matemático, todavía se visiona fraccionado y desde este Programa para la educación Básica, se:

- Parte del reconocimiento e importancia del manejo de las operaciones fundamentales y procedimientos algorítmicos como forma de contribuir decididamente a la educación integral del individuo.
- Acoge el enfoque de sistemas, que contrasta con el enfoque por conjuntos de la llamada “Nueva matemática” o “Matemática Moderna” (New Math), con el

enfoque por habilidades algorítmicas básicas de la corriente de “Volver a lo básico” (Back to Basics), y con el enfoque de resolución de problemas (Problem Solving Approach).

- Asume un sistema como un conjunto de objetos con sus relaciones y operaciones.
- Plantean como sistemas (interrelacionados), que articulan los contenidos para la educación básica: Los numéricos, Geométricos, Métricos, de datos, Lógicos, de Conjuntos, operaciones y relaciones y analíticos.

Hacia el año 1996, en el proceso de construcción de lineamientos curriculares reconociendo los aportes, avances y logros de la renovación curricular, se incorporan nuevos elementos provenientes de las investigaciones en el campo de la educación o didáctica de la matemática, nuevos enfoques y tendencias para la orientación de la matemática en contextos escolares y las nuevas perspectivas sobre la matemática escolar y sus propósitos formativos. Esto llevó a la construcción participativa de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [32], en los cuales se enriquece la perspectiva respecto a la naturaleza e importancia de contribuir al desarrollo del pensamiento variacional.

Fundamentalmente en los Lineamientos Curriculares, se plantea como propósito central de la educación matemática de los niveles de básica y media contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas.

Desde este marco la *variación* se considera como una de los conceptos de mayor importancia dentro de las matemáticas, pues posibilita la comprensión de diversos fenómenos de la naturaleza a partir de ecuaciones que los modelan. Para que el estudiante alcance el éxito en este campo es necesario que se le de una formación acorde con lo que en el currículo escolar se denomina pensamiento variacional: “presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarnos en el dominio de un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas, donde la variación se encuentra como sustrato de ellas” [32, p. 72].

En esta forma se plantea que “se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificarla por medio de las cantidades y las magnitudes” [32, p. 72]. En los lineamientos se reconoce la necesidad de estudiar con detalle los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos.

En la vida práctica y el mundo científico, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

La razón de cambio involucra la variación de magnitudes que es necesario medir y comparar. Para los alumnos estas actividades son realizadas como procesos naturales asociados a diferentes situaciones o áreas del conocimiento, como son la geometría, la administración, las ciencias naturales, entre otras, lo que contribuye a que la enseñanza del concepto de cambio sirva para “preparar a los estudiantes para el estudio del cálculo que ha sido la meta central de las matemáticas escolares; plantear y resolver ecuaciones del cálculo es el fluido vital de las matemáticas tradicionales enfocadas a la ingeniería” [45, pp. 193 - 228].

En los lineamientos se señala que “entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas” [32, p. 73].

Este documento orienta respecto a que la organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. Adicionalmente se señala, que la tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente y que puede tener un número infinito de valores de reemplazo [32, p. 73]. Y aunque en algunas ocasiones enfatiza la variación numérica discreta, es necesario ir construyendo la variación numérica continua. Así mismo, las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de las fórmulas.

Las tablas se pueden usar posteriormente para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante. La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas. Más adelante se formaliza el sistema cartesiano con el aprendizaje de su sintaxis. Por su parte, las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo. Ellas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados [32, p. 74].

Los contextos de la variación proporcional integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión. Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia. Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio.

Desde los propósitos planteados en los lineamientos, permitir que el estudiante manipule desde distintas perspectivas las relaciones involucradas en un proceso de variación, nutre el trabajo conceptual, creando un ambiente propicio para que comprenda el significado formal o algorítmico y a su vez amplíe la red de relaciones matemáticas con el contexto. Este aspecto debe considerarse como un objetivo primordial en la enseñanza de las matemáticas, pues es usual que en el aula de clase el trabajo se realizase en forma contraria, es decir, partiendo de desarrollos procedimentales y algorítmicos sin significado con el contexto en el que se desarrollan las actividades escolares.

### 1.3.2. La razón de cambio en el ciclo básico escolar

Como se indicó en las secciones anteriores la idea de pensamiento variacional aparece explícitamente en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Este tipo de pensamiento tiene la intención de profundizar un poco más en lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio.

Desde este mismo documento rector, lo que se pretende es crear interrelaciones que permitan identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación. Según lo propuesto se reconocen como ejes articuladores:

- Las magnitudes y la proporcionalidad.
- El continuo numérico. Los reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo.

El desarrollo de este concepto debe ser considerado como parte del currículo matemático desde los primeros años de escolaridad, empezando este proceso con el estudio de patrones, regularidades y transformaciones, descripción de cambios y proporciones simples, para permitirle al estudiante que paulatinamente logre procesos de sistematización a partir de la construcción de tablas, representaciones gráficas y escritas u otros instrumentos que posibilitan la percepción de generalizaciones que conduzcan al estudio dinámico de las variables.

Al finalizar el ciclo básico de escolaridad, el concepto que sintetiza los procesos de cambio estudiados es la razón de cambio, que para situaciones en las que la variación es constante se pueden modelar a partir de la ecuación de la línea recta  $y = mx + b$ , en la que  $m$  es valor que representa la relación de la variación entre los fenómenos observados. La comprensión de este concepto le propone al estudiante nuevos retos desde distintas perspectivas: desde el lenguaje, la manipulación de nuevas expresiones matemáticas, el significado de cada uno de los términos de la ecuación de acuerdo con el contexto del que se han extraído las variables objeto de estudio, la representación gráfica, entre otras.

Desde esta propuesta nacional, el maestro, tiene la responsabilidad de involucrar en el aula de clase estrategias de intervención metodológica que estimulen la exploración, el descubrimiento y la construcción de ideas matemáticas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Particularmente, en el concepto de razón de cambio, esto posibilita la comprensión de la relación de proporcionalidad entre dos variables, permitiendo que el aprendizaje este dotado de significado. Es decir, se deben poner a disposición de los estudiantes herramientas que les permitan relacionar la razón de cambio con su cotidianidad, que amplíe su marco conceptual para que a partir del desarrollo algorítmico puedan construir estrategias heurísticas de solución de problemas.

Surge entonces, “la necesidad de considerar las cantidades dependientes las unas con las otras, más allá de abordarlas de modo absoluto lo que constituye un problema para muchos alumnos y se torna un obstáculo para la comprensión de contenidos que deben aprenderse y que guardan relación con la noción de proporcionalidad. La comprensión de esta noción y en consecuencia el éxito en la resolución de problemas de proporcionalidad está ligada a factores internos, como es el desarrollo cognitivo del sujeto, y a factores externos como, los números que constituyen las razones y las magnitudes que se compara” [40, pp. 65 - 70].

Desde las ideas propuestas es necesario plantear una estrategia de intervención metodológica, enmarcada en un enfoque metodológico que permita la comprensión de los conceptos y los vincule a situaciones propias del concepto. De esta forma se estaría garantizando el objetivo de la enseñanza y del aprendizaje y se potencien a la vez habilidades a favor del desarrollo del pensamiento variacional.



---

## Capítulo 2

# Fundamentos teóricos

---

EN el presente capítulo se exponen teorías del aprendizaje y modelos educativos diseñados para ayudar a los alumnos, involucrados en procesos de enseñanza y de aprendizaje, a mejorar *la comprensión* como una habilidad de pensamiento, bien sea frente a un concepto específico de una rama del conocimiento o en la forma de resolver problemas asociados a ella.

En el marco educativo, se describe la Enseñanza para la Comprensión (EpC) como un enfoque metodológico que sustenta que “... los estudiantes saben aplicar los conocimientos sin comprender la esencia del problema que están resolviendo; juzgan con ligereza y sin elementos analíticos los fenómenos sociales que los afectan; defienden posiciones sin presentar evidencias o argumentos sólidos ...” [4]. Con base en la anterior idea y reconociendo las posibilidades que determina la EpC en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, se presenta formalmente el problema objeto de estudio de esta investigación y los objetivos que la delimitan.

### 2.1. Teorías del aprendizaje

Es claro que la educación, en especial la Educación Matemática, como ciencia, como arte, y como conjunto de acciones tendentes a transformar, necesita apoyarse en algunas teorías psicológicas del aprendizaje. Sin embargo, no puede realizarse una transferencia mecánica desde los principios psicológicos a las determinaciones normativas de su didáctica. Según Gimeno y Pérez [23, p. 36],

“...la mayoría de las teorías del aprendizaje son modelos explicativos que han sido obtenidos en situaciones experimentales, y hacen referencia a aprendizajes de laboratorio, que sólo relativamente pueden explicar el

funcionamiento real de los procesos naturales del aprendizaje incidental y del aprendizaje del aula. Estas teorías deberían afrontar estos procesos como elementos de una situación de intercambio, de comunicación, entre el individuo y su entorno físico y sociocultural, donde se establecen relaciones concretas y se producen fenómenos específicos que modifican al sujeto”.

Sin embargo, la dificultad de comprender los problemas de aprendizaje del sujeto, no son enfrentados por todas las teorías del aprendizaje con la misma pretensión de aproximación a las situaciones naturales vividas en el aula.

A continuación, se describen algunas de las principales teorías del aprendizaje que se desarrollaron en el siglo XX. Se reconoce en ellas la forma como buscan que el proceso de enseñanza y de aprendizaje se de comprensivamente, desarrollando esta habilidad de pensamiento en el individuo.

### 2.1.1. Aprendizaje significativo de David Ausubel

Dentro de la psicología educativa, Ausubel considera que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva. Este autor concibe al alumno como un procesador activo de la información, y al aprendizaje como un proceso sistemático y organizado, pues es un fenómeno complejo que no se reduce a simples asociaciones memorísticas.

Ausubel, resalta que no es factible que *todo* el aprendizaje significativo que ocurre en el aula sea producto de un descubrimiento, es posible que también sea a causa de un trabajo repetitivo o memorístico.

Si el aprendizaje es significativo, es porque los nuevos conocimientos se incorporan como propios en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos. Para este proceso son importantes los intereses y motivaciones del alumno por aprender.

Según, Ausubel [13, p. 38], el aprendizaje significativo que se da en el aula de clase puede ser de diferentes tipos:

- Recepción repetitiva.
- Recepción significativa.
- Descubrimiento repetitivo.
- Descubrimiento significativo.

Ellos a su vez generan dos dimensiones:

1. La que se refiere al *modo en el que se adquiere el conocimiento*.
2. La relativa a la *forma en que el conocimiento es subsecuentemente incorporado en la estructura de conocimientos* o estructura cognitiva del aprendiz.

Estas forma y dimensiones del aprendizaje no se dan de forma lineal, sino que se determinan como un continuo de posibilidades, donde se relacionan la acción docente, los planteamientos de enseñanza la actividad cognitiva y afectiva del aprendiz.

Los cuadros 2.1 y 2.2 de las páginas 27 y 28, sintetizan las ideas de Ausubel acerca de las situaciones mencionadas [12].

Primera dimensión	
Modo en el que se adquiere la información	
Recepción	Descubrimiento
El contenido se presenta en su forma final.	el contenido principal a ser aprendido no se da, el alumno tiene que descubrirlo.
El alumno debe internalizarlo en su estructura cognitiva.	Propio de la formación de conceptos y solución de problemas.
No es sinónimo de memorización.	Puede ser significativo o repetitivo.
Propio de etapas avanzadas del desarrollo cognitivo en la forma de aprendizaje verbal hipotético son referentes concretos (pensamiento formal).	Propio de las etapas iniciales del desarrollo cognitivo en el aprendizaje de conceptos y proposiciones.
Útil en campos establecidos del conocimiento.	Útil en campos del conocimiento donde no hay respuestas unívocas.
Ejemplo: Se pide al alumno que estudie fenómenos de la difracción en su libro de texto de Física, capítulo 8.	Ejemplo: el alumno, a partir de una serie de actividades experimentales (reales y concretas) induce principios que subyacen al fenómeno de la combustión.

Cuadro 2.1: Situaciones de aprendizaje y la forma de adquirir la información.

Segunda dimensión	
Forma en que el conocimiento se incorpora en la estructura cognitiva del aprendiz	
Significativo	Repetitivo
La información nueva se relaciona con la ya existente en la estructura cognitiva de forma sustantiva, no arbitraria ni al pie de la letra.	Consta de asociaciones arbitrarias, al pie de la letra.
El alumno debe tener una disposición o actitud favorable para extraer el significado	El alumno manifiesta una actitud de memorizar la información.
El alumno posee conocimientos previos o conceptos de anclaje pertinentes.	El alumno no tiene conocimientos previos pertinentes o no los “encuentra”.
Se puede construir un entramado o red conceptual.	Se puede construir una plataforma o base de conocimientos factuales.
Condiciones: Material: significado lógico. Alumno: significado psicológico	Se establece una relación arbitraria con la estructura cognitiva.
Puede promoverse mediante estrategias apropiadas (por ejemplo, los organizadores anticipados y los mapas conceptuales).	Ejemplo: aprendizaje mecánico de símbolos, convenciones, algoritmos.

Cuadro 2.2: Situaciones de aprendizaje y la estructura cognitiva.

Desde esta perspectiva, el **aprendizaje significativo** es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes. Si se logra esta tipificación es posible que:

- La información retenida se más duradera.
- Los nuevos conocimientos sean adquiridos con mayor facilidad y se relacionen con los anteriores de forma significativa.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, sea guardada en la memoria a largo plazo.

Para lograr el desarrollo de esta teoría del aprendizaje en las prácticas pedagógicas se hace necesario que el maestro conozca los conocimientos previos del alumno, es decir, se debe asegurar que el contenido que se vaya a trabajar pueda relacionarse con las

ideas previas, ya que al conocer lo que sabe el alumno ayuda a la hora de planear. Así mismo es necesario organizar los materiales en el aula de manera lógica y jerárquica, teniendo en cuenta que no sólo importa el contenido sino la forma en que se presenta a los alumnos. Es importante considerar la motivación como un factor fundamental para que el alumno se interese por aprender, ya que el hecho de que el alumno se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender y por último el maestro debe utilizar ejemplos, por medio de dibujos, diagramas o fotografías, para enseñar los conceptos.

Este trabajo puede ser desarrollado por el docente por medio de **estrategias de enseñanza**, que son “*procedimientos que el agente que enseña utiliza en forma reflexiva y flexible para promover el logro del aprendizaje significativo en los alumnos*” [43, pp. 276 - 295].

Según Barriga [13, p. 141], es necesario tener presentes cinco aspectos esenciales para considerar qué tipo de estrategia es la indicada para utilizarse en ciertos momentos de la enseñanza, dentro de una sección, un episodio o una secuencia instruccional, a saber:

1. Consideración de las características generales de los aprendices (nivel de desarrollo cognitivo, conocimientos previos, factores motivacionales, etc.).
2. Tipo de dominio del conocimiento en general y del contenido curricular en particular, que se va a abordar.
3. La intencionalidad o meta que se desea lograr y las actividades cognitivas y pedagógicas que debe realizar el alumno para conseguirla
4. Vigilancia constante del proceso de enseñanza (de las estrategias de enseñanza empleadas previamente, si es el caso), así como del progreso y aprendizaje de los alumnos.
5. Determinación del contexto intersubjetivo (por ejemplo, el conocimiento ya compartido) creado con los alumnos hasta ese momento, si es el caso.

El tipo de estrategia de enseñanza y la forma de intervenir en el aula son decisiones que competen al docente, pero de su elección depende el efecto e impacto en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Al ser los estudiantes, los directos implicados en este proceso, las estrategia de enseñanza les conducen a desarrollos que generan **estrategias de aprendizaje**, las cuales pueden considerarse como “*procedimientos (conjuntos de pasos, operaciones o habilidades) que un aprendiz emplea en forma consciente, controlada e intensional*

*como instrumentos flexibles para aprender significativamente y solucionar problema*”. [14, p. 234];[22].

Según Pozo [39], los tres rasgos más característicos de las estrategias de aprendizaje son:

1. La aplicación de las estrategias es controlada y no automática; requiere necesariamente de una toma de decisiones, de una actividad previa de planificación y de un control de su ejecución. En tal sentido, las estrategias de aprendizaje precisan de la aplicación del conocimiento metacognitivo y, sobre todo, autorregulador.
2. La aplicación experta de las estrategias de aprendizaje requieren una reflexión profunda sobre el modo de emplearlas. Es necesario que se dominen las secuencias de acciones e incluso las técnicas que las constituyen y que sepan además cómo y cuándo aplicarlas flexiblemente.
3. La aplicación de la misma implica que el aprendiz las sepa seleccionar inteligentemente de entre varios recursos y capacidad que tenga a su disposición. Se utiliza una actividad estratégica en función de demandas contextuales determinadas y de la consecución de ciertas metas de aprendizaje.

La educación, para el aprendizaje significativo supone la capacidad de desarrollar estrategias de aprendizaje de larga vida, aprender a aprender. Asume que cada alumno viene con su particular bagaje de experiencias y conocimientos y, por lo tanto, su aprendizaje estará condicionado por tales experiencias. Es deber del docente, tomar en cuenta estas experiencias y tratar de neutralizarlas si son perjudiciales, y a su vez, alentarlas si son positivas.

### 2.1.2. Taxonomía de Bloom

La taxonomía cognitiva de este autor [6], se basa en la idea de que las operaciones cognitivas pueden clasificarse en seis niveles de complejidad creciente. Lo que tiene de taxonómico esta teoría, es que cada nivel depende de la capacidad del alumno para desempeñarse en el nivel o los niveles precedentes. La taxonomía no es un solo esquema de clasificación, sino un intento de ordenar jerárquicamente los procesos cognitivos.

Esta teoría, en relación al campo cognoscitivo, abarca seis (6) subáreas del conocimiento relacionadas con la memorización, la comprensión, la aplicación, el análisis, la evaluación y la creación. Las tres primeras se denominan de bajo nivel por la inmediatez con que son usadas por los estudiantes. Las tres siguientes, consideradas

de alto nivel por los esfuerzos cognitivos que debe desempeñar un estudiante para implementarlas. A continuación se explica brevemente cada una de ellas [6]:

**Memorizar:** Implica conocimiento de hechos específicos y conocimientos de formas y medios de tratar con los mismos, conocimientos de lo universal y de las abstracciones específicas de un determinado campo del saber. Son de modo general, elementos que deben memorizarse.

**Comprender:** El conocimiento de la comprensión concierne el aspecto más simple del entendimiento que consiste en captar el sentido directo de una comunicación o de un fenómeno, como la comprensión de una orden escrita u oral, o la percepción de lo que ocurrió en cualquier hecho particular.

**Aplicar:** El conocimiento de aplicación es el que concierne a la interrelación de principios y generalizaciones con casos particulares o prácticos.

**Analizar:** El análisis implica la división de un todo en sus partes y la percepción del significado de las mismas en relación con el conjunto. El análisis comprende el análisis de elementos, de relaciones, etc.

**Evaluar:** Este tipo de conocimiento comprende una actitud crítica ante los hechos. La evaluación puede estar en relación con juicios relativos a la evidencia interna y con juicios relativos a la evidencia externa.

**Crear** A la creación concierne la comprobación de la unión de los elementos que forman un todo. Puede consistir en la producción de una comunicación, un plan de operaciones o la derivación de una serie de relaciones abstractas.

En la Figura 2.1<sup>1</sup>, muestra las subáreas de conocimiento y los niveles que determinan.

---

<sup>1</sup>Imagen tomada de <http://images.google.com.co/>, Taxonomía de B. Bloom. Enero 19 de 2009.



Figura 2.1: Gráfico explicativo taxonomía de Bloom.

La contribución de Bloom a la educación va más allá de su taxonomía. Estaba interesado fundamentalmente en el pensamiento y en su desarrollo. Lo que Bloom pretendía develar era en qué pensaban los alumnos mientras enseñaban los profesores, porque reconocía que, en definitiva, lo importante era lo que ellos estaban experimentando. La utilización de protocolos de pensamiento en voz alta proporcionó una base importante, para comprender mejor qué sucedía en la mente de los alumnos.

### 2.1.3. Resolución de problemas de Polya

Este método está enfocado a la solución de problemas matemáticos, entendiendo la distinción entre “ejercicio” y “problema”. Para resolver un ejercicio, se aplican procedimientos rutinarios que llevan a la respuesta. Para resolver un problema, es necesario hacer una pausa, reflexionar y hasta puede que se ejecuten pasos originales que no se habían ensayado antes para dar la respuesta. Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución.

Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas, pues ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos – entre otras cosas –, los cuales se aplican al desarrollar la tarea de resolver problemas. Como apuntamos anteriormente, la más grande contribución de Polya [37, pp. 28 - 35], en la enseñanza de las matemáticas es su método de cuatro pasos para resolver problemas. A continuación se presenta de



una forma general:

**Comprensión del problema.** En esta fase del problema se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema.

**Configurar un plan.** En esta fase se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución.

**Ejecución del plan.** En esta fase se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución del problema.

**Visión retrospectiva.** La idea fundamental, de esta fase es tratar de resolver el problema de una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida.

Aunque las ideas de Polya, se comenzaron a implementar a partir de 1980, las estrategias heurísticas como dibujar programas, buscar submetas, considerar casos particulares y resolver problemas más simples que se consideran como parte esencial de la instrucción matemática, muestran todavía una diferencia notable en el aprovechamiento matemático de los alumnos, esta idea, según Polya [37, p. 28], se ve reflejada en el siguiente párrafo:

“Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel”.

Desde esta idea, se evidencia la importancia de tener un método y apropiarse de una forma de trabajo adecuada en la resolución de problemas matemáticos, debido a que esto debe convertirse en una experiencia significativa en el trabajo de aula.

#### 2.1.4. Inteligencias Múltiples

La teoría de las inteligencias múltiples es un modelo propuesto por Howard Gardner [21, p. 96] en el que la inteligencia no es vista como algo unitario, que agrupa diferentes

capacidades específicas con distinto nivel de generalidad, sino como un conjunto de inteligencias múltiples, distintas e independientes. Gardner define la inteligencia como “una competencia intelectual humana que debe dominar un conjunto de habilidades para la solución de problemas –permitiendo al individuo *resolver los problemas genuinos o las dificultades* que encuentre y, cuando sea apropiado, crear un producto efectivo– y también debe dominar la potencia para *encontrar o crear problemas* –estableciendo con ello las bases para la adquisición de nuevo conocimiento”.

Añade que así como hay muchos tipos de problemas que resolver, también hay muchos tipos de inteligencia. Hasta la fecha Howard Gardner y su equipo de la Universidad Harvard han identificado ocho tipos distintos:

**Inteligencia lingüística:** la capacidad para usar palabras de manera efectiva, sea en forma oral o de manera escrita. Esta inteligencia incluye la habilidad para manipular la sintaxis o significados del lenguaje o usos prácticos del lenguaje.

**Inteligencia lógica-matemática:** la capacidad para usar los números de manera efectiva y razonar adecuadamente. Esta inteligencia incluye la sensibilidad a los esquemas y relaciones lógicas, las afirmaciones y las proposiciones, las funciones y las abstracciones. Los tipos de procesos que se usan al servicio de esta inteligencia incluyen: la categorización, la clasificación, la inferencia, la generalización, el cálculo y la demostración de la hipótesis.

**Inteligencia espacial:** la habilidad para percibir de manera exacta el mundo visual-espacial y de ejecutar transformaciones sobre esas percepciones. Esta inteligencia incluye la sensibilidad al color, la línea, la forma, el espacio y las relaciones que existen entre estos elementos. Incluye la capacidad de visualizar, de representar de manera gráfica ideas visuales o espaciales.

**Inteligencia musical:** la capacidad de percibir, discriminar, transformar y expresar las formas musicales. Esta inteligencia incluye la sensibilidad al ritmo, el tono, la melodía, el timbre o el color tonal de una pieza musical.

**Inteligencia cinestésicorporal:** la capacidad para usar todo el cuerpo para expresar ideas y sentimientos y la facilidad en el uso de las propias manos para producir o transformar cosas. Esta inteligencia incluye habilidades físicas como la coordinación, el equilibrio, la destreza, la fuerza, la flexibilidad y la velocidad, además de las capacidades auto perceptivas, las táctiles y la percepción de medidas y volúmenes.

**Inteligencia intrapersonal:** el conocimiento de sí mismo y la habilidad para adaptar las propias maneras de actuar a partir de ese conocimiento. Esta inteligencia incluye tener una imagen precisa de uno mismo, tener conciencia de los estados

de ánimo interiores, las intenciones, las motivaciones, los temperamentos y los deseos, y la capacidad para la autodisciplina, la auto comprensión y la autoestima.

**Inteligencia interpersonal:** la capacidad de percibir y establecer distinciones en los estados de ánimo, las intenciones, las motivaciones, y los sentimientos de otras personas. Esto puede incluir la sensibilidad a las expresiones faciales, la voz y los gestos, la capacidad para discriminar entre diferentes clases de señales y la habilidad para responder de manera efectiva a estas señales en la práctica.

Este autor, en primer lugar, amplía el campo de lo que es la inteligencia y reconoce que la brillantez académica no lo es todo. Inicia una diferenciación entre las personas con capacidad intelectual pero incapacidad para desarrollarse en otras situaciones, por ejemplo, desempeñarse bien académicamente pero tener dificultades para elegir a sus amigos. Para desempeñarse bien se requiere ser inteligente, pero en cada campo se utiliza un tipo de inteligencia distinto.

En segundo lugar, Gardner define la inteligencia como una capacidad, lo que rompió con paradigmas, pues se consideraba algo innato e inamovible. Se nacía inteligente o no, y la educación no podía cambiar ese hecho. A partir de la posibilidad planteada por Gardner, la escuela replantea sus intervenciones y genera mayores niveles de inclusión a alumnos con dificultades de aprendizaje.

Según esta teoría, todos los seres humanos poseen todos los tipos de inteligencia en mayor o menor medida. Gardner enfatiza el hecho de que todas las inteligencias son igualmente importantes, lo que fundamenta proyectos educativos para la enseñanza y el aprendizaje a través de actividades que promueven una diversidad de inteligencias, asumiendo que los alumnos poseen diferente nivel de desarrollo de ellas y por lo tanto es necesario que todos las pongan en práctica, preparándose para vivir en un mundo cada vez más complejo.

## 2.2. Modelos educativos relacionados con la comprensión

En los últimos setenta años, las ideas sobre la enseñanza para la comprensión han evolucionado desde los modelos que destacan la transmisión de la información hasta aquellos que insisten en la transformación del conocimiento por parte del alumno. Se ha pasado del énfasis en la idea del profesor que proporciona una información de forma directa, estructurada y organizada, al énfasis en el papel que cada uno de los que aprenden desempeña en la construcción de la comprensión y en la influencia que el entorno social ejerce sobre esta construcción.

En palabras de Biddle, “Ideas recientes surgidas de estudios sobre el aprendizaje cotidiano han dado lugar a un nuevo énfasis en las influencias sociales en el aprendizaje, más que en las individuales. Se ha destacado la naturaleza cultural y situada de los conocimientos y del aprendizaje. Las nuevas teorías afirman que la comprensión está contextualizada y es una función de la interacción social con los demás, con las tareas que se emprenden, las herramientas que se emplean, y el contexto inmediato que refleja la cultura en que se desarrollan y usan las ideas” [5, p. 174].

Teniendo como referente lo anteriormente expuesto, en la siguiente sección se presentan algunos modelos educativos que procuran que el desarrollo en el aula parta de problemas reales, permiten la colaboración entre los alumnos y fomentan la comprensión de los conceptos objeto de estudio desde diferentes formas de aprendizaje.

### 2.2.1. Modelo Educativo de van Hiele

Este modelo educativo, surge debido a los problemas que tienen los niños para comprender las tareas y actividades propuestas por sus profesores, pues éstas son propuestas en un lenguaje con en general no es comprendido por los aprendices. El estudio de los esposos van Hiele, ha generado nuevas alternativas metodológicas, las cuales ayudan a comprender de una mejor forma el razonamiento exhibido por los alumnos frente al concepto objeto de estudio.

Está constituido por tres partes: (i) La percepción (*insight*), (ii) Los niveles de pensamiento, y (iii) Las fases de aprendizaje, que según van Hiele, citado por Esteban [17], tal como se utiliza actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas.
2. Cada nivel supone una forma de comprensión un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede **comprender** y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
3. Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.
4. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que este se haga de un modo rápido y eficaz.

A continuación, se presentará en breve una descripción de cada una de las partes que lo conforma.

### El Insight

Esta parte de este modelo educativo, hace referencia a *“los cambios que presenta un alumno en su forma de razonamiento, frente a un concepto específico, a lo largo de una intervención pedagógica, se puede observar y analizar a través del aumento progresivo en el lenguaje empleado por él, y a su vez, en la forma como manifiesta, analiza y emplea el nuevo conocimiento adquirido en nuevas situaciones”* [49, p. 20].

Según van Hiele, se denomina *Insight* y lo define como **comprensión** y aunque no realiza una definición propia, pues se propone estudiar la comprensión tal y como existe en la enseñanza de las matemáticas. Intenta en lo posible ceñirse al contenido conceptual que se ha venido dando a la “comprensión” en ese contexto. Es por ello que *“desiste de la metodología que resulta más eficaz en matemáticas: elaborar una definición de comprensión para obtener un contenido conceptual con el que trabajar cómodamente”* [47, p. 1].

Para este autor, se logra **la comprensión** cuando una persona *“actúa adecuadamente”* en una *“nueva situación”* [47, p. 4]. Esta idea fundamenta este trabajo investigativo, puesto que son las circunstancias no vividas las que ponen en manifiesto las capacidades que posee el estudiante para resolver problemas de manera favorable. Las actividades rutinarias impiden las relaciones con otros contextos y por ende los aprendizajes comprensivos.

### Los niveles de razonamiento

Los niveles de razonamiento, también llamados la parte descriptiva del modelo, permiten ubicar a un alumno en alguno de ellos, de acuerdo con la **comprensión** que tenga frente a un concepto matemático.

Van Hiele definió cinco, y son una forma de estructurar un concepto matemático en su red de relaciones, describiéndolos para la geometría.

**Nivel 0, Predescriptivo:** Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global, pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras. El estudiante en este nivel reconoce los triángulos por sus tres lados, pero no los tipifica.

**Nivel 1, Visualización o Reconocimiento:** En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares.

Este nivel puede identificarse cuando un estudiante reconoce paralelogramos en un conjunto de figuras, ángulos y triángulos en diferentes posiciones.

**Nivel 2, Análisis:** El estudiante logra percibir propiedades de los objetos geométricos. Describen los objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras. Es el caso, cuando los estudiantes reconocen que un cuadrado tiene lados y ángulos iguales.

**Nivel 3, Ordenación o clasificación:** Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias. Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales. En este nivel, los estudiantes son capaces de reconocer que en un paralelogramo, los lados opuestos son iguales e implican lados opuestos paralelos y que los lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

**Nivel 4, Deducción Formal:** En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática y los estudiantes demuestran de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Debe tenerse presente que estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- No se puede alcanzar el nivel  $n$  sin haber pasado por nivel anterior  $n - 1$ , o sea, el progreso de los alumnos a través de los niveles es invariante.
- En cada nivel de pensamiento, lo que era implícito, en el nivel siguiente se vuelve explícito.
- Cada nivel tiene su lenguaje utilizado (símbolos lingüísticos) y su significatividad de los contenidos (conexión de estos símbolos dotándolos de significado).
- Dos estudiantes con distinto nivel no pueden entenderse.

Para poder realizar una clasificación de un grupo de estudiantes en los diferentes niveles, se necesitan los descriptores de los niveles de razonamiento y según Esteban [17, p. 22], se definen como las principales características que permiten

reconocer cada uno de esos niveles de razonamiento matemático, a partir de la actividad de los estudiantes. Para cada nivel, se pueden clasificar en descriptores de detección y separación, que son respectivamente, los que permiten establecer que criterios debe cumplir un alumno para ser inscrito en un nivel de razonamiento determinado y cuáles debe superar para que sea promovido al nivel inmediatamente superior.

### Las fases de aprendizaje

Las fases de aprendizaje tienen como fin, ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, y básicamente constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Las fases de aprendizaje son cinco (5) y se describen, según Gutiérrez [25, pp. 295 - 384], de la siguiente forma:

**Información:** Se trata de toma de contacto; el profesor debe informar a los alumnos sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, que tipo de problemas se van a plantear, que materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para el trabajo matemático propiamente dicho.

**Orientación directa:** Los alumnos empiezan a explorar el campo de estudio por medio de las investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los alumnos descubran, comprendan y aprendan cuales son los conceptos, propiedades, figuras, etc., principales en el área que se está estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

**Explicitación:** Los alumnos intercambian sus experiencias, comentan la regularidades observadas, explican como han resuelto las actividades. Además, se debe prestar gran atención a las diferencias en los puntos de vista, ya que el intento de cada alumno por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas, ordenarlas y expresarlas con claridad. Es importante recalcar que esta fase, no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones, de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

**Orientación libre:** Los estudiantes aplican los conocimientos y el lenguaje adquirido en otras actividades (investigaciones) diferentes a las anteriores. El campo de estudio que es en gran parte conocido por los alumnos, debe ser perfeccionado, esto se consigue mediante el planteamiento de actividades, que preferiblemente puedan desarrollarse de diversas formas o que impliquen diferentes soluciones. En estas actividades se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero

de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores. Este tipo de actividades es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan relaciones más complejas y más “importantes”.

**Integración:** Se refuerza la visión general sobre los contenidos, relacionando los conocimientos adquiridos con otros campos ya estudiados, pero no aportando ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante, esta solo debe ser una acumulación, comparación e integración de cosas que ya conoce.

Completadas esta cinco fases, los alumnos habrán adquirido una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior, complementándola y reformulándola, y a partir de ese momento, el alumno ha progresado a un nuevo nivel de razonamiento.

### 2.2.2. Modelo de entendimiento de Pirie y Kieren

La teoría de aprendizaje desarrollada por Pirie y Kieren en 1994, define el Entendimiento Matemático de la siguiente forma:

- El Entendimiento Matemático puede caracterizarse por niveles pero no en forma lineal.
- Es un fenómeno recursivo, y la recursión ocurre cuando el pensamiento se mueve entre niveles sofisticados.
- Cada nivel de entendimiento está contenido en los niveles siguientes.
- Cualquier nivel en su interior es dependiente de las formas y los procesos y además está condicionado por los niveles externos.

Usando esta definición, concibieron su modelo de Entendimiento Matemático compuesto por ocho niveles potenciales: *Primitive Knowing*, *Image Making*, *Image Having*, *Property Noticing*, *Formalising*, *Observing*, *Structuring*, *Inventising*, que se pueden traducir como “Conocimiento primitivo”, “Creación de la imagen”, “Estableciendo imagen”, “Deducción de propiedades”, “Formalización”, “Observación”, “Estructuración” y “Creación o Invención”, la Figura 2.2 en la página 41 muestra la concepción del modelo de Entendimiento Matemático, el cual comienza por el primer nivel potencial *Primitive Knowing* o PK.



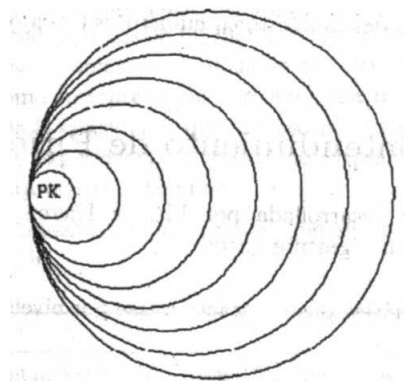


Figura 2.2: Concepción del modelo de Entendimiento Matemático de Pirie y Kieren, compuesto por ocho niveles potenciales.

### Características del Modelo de Pirie y Kieren

Este modelo es dinámico, pues capta la esencia del cambio del entendimiento de un concepto en todo momento. Hay una característica fractal en el modelo, el nivel de “Conocimiento Primitivo” comprende muchos tópicos, cada uno entendido en su propio nivel. La característica más crítica del modelo es el desdoblamiento, que ocurre cuando se experimenta una nueva situación y el entendimiento presente no satisface las exigencias cognitivas del problema. El aprendiz, vuelve a examinar los niveles anteriores de entendimiento a la luz de la parte que no encaja y entonces reorganiza el nivel interno para acomodar la nueva información. Otra característica del modelo, es el complemento de un proceso y una acción de forma orientada. Para cada nivel, Pirie y Kieren creen que se deben exhibir algunas acciones y verbalizaciones con el fin de considerar que se está operando en el nivel particular respectivo. La descripción anterior caracteriza un concepto particular; las acciones específicas y verbalizaciones serán trazadas a la luz del modelo general. Si el aprendiz no demuestra tal complemento en el proceso y en la acción de forma orientada, se considera que no ha alcanzado el nivel de comprensión.

## 2.3. Enseñanza para la Comprensión

Este enfoque metodológico “Es un abordaje posible de la tarea docente que intenta encarar y resolver el persistente problema: cómo lograr que los alumnos se interesen, comprendan y utilicen los conocimientos que les enseñamos” [27].

El Proyecto Zero de la Escuela de Educación de la Universidad de Harvard<sup>2</sup>, viene desarrollando una investigación acerca de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). A continuación se presentará una corta descripción.

**La comprensión** supone un conocimiento activo, es decir, un conocimiento que está disponible para el individuo y puede usarlo en diversas situaciones. Cuando una persona usa el conocimiento en situaciones inéditas es porque ha logrado la comprensión, ha utilizado el conocimiento previamente adquirido.

Para lograr que, en la experiencia de aula, se cumpla este objetivo, Perkins [36] y el equipo del Proyecto Zero proponen un enfoque organizador de la reflexión docente y orientador para la toma de decisiones didácticas en el aula, orientado por cuatro (4) preguntas que fundamentan las dimensiones de este enfoque. En el siguiente Cuadro 2.3 se define la dimensión y se relaciona con la pregunta reflexiva.

Dimensión	Pregunta clave	Definición
Redes conceptuales	¿Qué conocimientos quiere que sus estudiantes comprendan?	Es aquella estrategia que permite al docente determinar el orden de enseñanza, ya que con esta dimensión se definen los ejes temáticos que serán abordados durante la experiencia.
Métodos de producción del conocimiento	¿Cómo construyen los estudiantes esa comprensión?	Se basa en considerar diversas alternativas que puede seguir para que los alumnos luego de realizar las actividades realicen afirmaciones sobre algún conocimiento, teniendo presente que lo enseñado no es lo que realmente ocurrió, sino más bien la comprensión actual de lo que se piensa que ocurrió.
Praxis	¿Cuál es el propósito de tener ese conocimiento?	En esta instancia del proceso se deben generar actividades que le den la oportunidad al alumno de explorar crear, inventar, calcular y hasta cometer errores para corregirlos permitiéndole que por medio de actividades.
Comunicación	¿Cómo es que los estudiantes representan y comunican la comprensión hacia sí mismos y hacia otros?	Se hace indispensable que el docente analice la forma en que se puede comprender algo y determinar como y cuales serían las actividades de tipo comunicativo en las que se apoyará el desarrollo de la temática para que se alcance la comprensión de la misma.

Cuadro 2.3: Dimensiones de la EpC.

Es importante reconocer que este enfoque metodológico también está conformado por cuatro elementos que intervienen propiamente en el trabajo de aula. En el cuadro 2.4 se describe brevemente su definición y una pregunta que induce su reflexión.

<sup>2</sup>Gardner, H., Perkins, D. y Perrone, V., dirigen desde 1988 un Proyecto de Investigación acerca de la EpC que viene involucrando no sólo a un equipo de investigadores, sino a más de sesenta docente a través de cuyas prácticas se sustenta la investigación.

Elemento	Pregunta clave	Definición
Metas de comprensión	¿Qué contenidos vale la pena comprender?	Las metas de comprensión abarcadoras o hilos conductores hacen referencia a lo que realmente vale la pena comprender, pues ayudan a precisar las comprensiones que debería desarrollar un estudiante.
Tópicos generativos	¿Qué aspectos de esos contenidos deben ser comprendidos?	son los temas, cuestiones, conceptos, ideas y preguntas que proporcionan las significaciones o conexiones necesarias para lograr procesos comprensivos entre unos temas y otros y al mismo tiempo entre las temáticas abordadas y los estudiante.
Los desempeños de comprensión	¿Cómo podemos promover la comprensión?	Los desempeños de comprensión son actividades que exigen de los estudiantes usar sus conocimientos previos de maneras nuevas o en situaciones diferentes para construir la comprensión de aquello que se esta aprendiendo, demostrando el nivel de comprensión que han adquirido en el dominio de un tópico generativo.
La valoración continua y evaluación final	¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?	En esta parte del proceso se direcciona continuamente el trabajo de los estudiantes buscando el alcancen de las metas de comprensión.

Cuadro 2.4: Elementos de la EpC.

Se da importancia a este enfoque metodológico dentro de esta investigación, debido a que la EpC, permite que al proceso de enseñanza y de aprendizaje se vincule el contexto, aspecto fundamental cuando se pretende conceptualizar la razón de cambio. Esta nueva relación permite al docente ampliar las concepciones frente a la forma de enseñar y al mismo tiempo al estudiante ante las formas de participar de este proceso. Una ampliación de lo propuesto anteriormente se encuentra en el capítulo 3 en la página 51 donde se realiza una amplia exposición de este enfoque metodológico y toda su composición.

## 2.4. Investigaciones recientes que tienen como concepto objeto de estudio la razón de cambio o temáticas relacionadas

En esta sección se expone brevemente, los resultados de algunas investigaciones recientes que profundizan en la razón de cambio o conceptos matemáticos relacionados.

### 2.4.1. Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional

Este trabajo presentado por Villa y Posada [50], en el año 2006 en la Universidad de Antioquia (Colombia) para optar por el título de Magister, plantea una propuesta didáctica que pretende retomar las noción de variación, los proceso de

**modelación y los registros semióticos**, para lograr la conversión del lenguaje y el registro simbólico a la representación de carácter matemático.

De acuerdo con los autores, la función es la herramienta principal de la modelación de fenómenos de variación y cambio, lo que es expuesto en su problema de investigación. Exponen que el trabajo de aula se reduce a aplicar técnicas algorítmicas para solucionar diversas situaciones y se deja de lado la proporción y la variación como ruta para comprender el concepto de función.

Se propone como objetivo, “*determinar las características didácticas y conceptuales de la función lineal*” [50, p. 38], teniendo componentes metodológicos que apuntan al desarrollo de la ingeniería didáctica. Su desarrollo investigativo lo caracteriza el esquema experimental basado en análisis preliminares, en la experimentación y la validación. El trabajo experimental se fundamenta en la representación de la función de forma cartesiana, tabular, simbólica (algebraica) y desde el lenguaje.

En el análisis de los resultados determinan variables: explícitas, implícitas, discretas y continuas. Clasifica a los estudiantes según el proceso de modelación, de la percepción y cuantificación de las variables y desde los sistemas de representación.

#### 2.4.2. Elementos para una didáctica del pensamiento variacional

Este estudio presenta una propuesta didáctica que pretende acercar a los estudiantes a la comprensión de las relaciones entre la pendiente de una recta y la razón de cambio. La propuesta es el resultado de una investigación realizada por Camargo y Guzmán [9], en el año 2000 e implementada en un grupo de estudiantes de un colegio distrital de Bogotá.

En su diseño, puesta en práctica y sistematización se tuvieron en cuenta las fases correspondientes a la metodología de investigación denominada “ingeniería didáctica” propuesta por Artigue [1], que consta de un análisis preliminar, una concepción de la ingeniería, una experimentación y un análisis posterior.

Esta investigación parte de un vacío curricular relacionado con la variación, que al ser analizado contribuye con la conceptualización del cálculo diferencial. Consideran los autores el concepto de pendiente desde un perfil geométrico, algebraico-operativo y funcional [9, pp. 14 - 17].

A partir de tres situaciones didácticas diseñadas e implementadas, realizan un análisis detallado de los aspectos considerados y presentan los resultados obtenidos. El estudio de las producciones de los estudiantes retrata el clima vivido en el aula y

permite constatar cómo, a partir de diseños planificados, es posible apreciar progreso en el desempeño matemático de los estudiantes.

### **2.4.3. La velocidad: Introducción al concepto de derivada**

El objetivo de esta investigación, realizada por Azcarate en 1990, ha sido el de evaluar el proceso de aprendizaje, en la asignatura de Matemáticas asociado al concepto derivada. Se fundamenta en la propuesta del grupo Zero.

El itinerario didáctico de esta introducción al concepto de derivada de una función en un puesta está pensado para alumnos que no han estudiado previamente los conceptos de continuidad y de límite [3, p. 8]. El punto clave de este estudio radica en el concepto de recta tangente y su carácter gráfico y enfoque intuitivo.

La investigación se centra en el estudio y seguimiento de los esquemas conceptuales de los alumnos referentes a tres conceptos fundamentales relacionados con la noción de derivada: el concepto de pendiente de una recta, el concepto de velocidad instantánea de un movimiento variado y el concepto de tasa instantánea de variación de una función. Además del análisis de los procedimientos de los alumnos asociados a estos mismos conceptos.

Este trabajo investigativo, se inscribe en el marco de las investigaciones educativas basadas en datos cualitativos, expresados en forma verbal y obtenidos a partir de cuestionarios escritos de preguntas abiertas y de entrevistas. Se analiza a fondo las dificultades de aprendizaje y la evolución de los alumnos, determinando sus causas y por último estudiando los métodos de enseñanza más apropiados. El tamaño de la muestra corresponde a ciento once (111) estudiantes, que se reduce a dieciocho (18) para la elaboración de las entrevistas.

Los cuestionarios aplicados buscan conocer la situación con respecto a ciertas habilidades en el cálculo [3, p. 53] y los test, a dar explicación a los niveles alcanzados.

Utilizan para el análisis el método de redes sistémicas [3, p. 98], con ellas es posible organizar diferentes configuraciones que demuestran la dependencia o independencia de las respuestas y de las cuales resulta una categorización que da los distintos modelos de respuesta.

El proceso de intervención podría resumirse en que para reconocer los requisitos previos, se aplicaron los cuestionarios y entrevistas, la pre-formalización en relación a cuestionario y entrevista y en la post-formalización se implementan entrevista, cuestionarios y nuevamente entrevista.

En esta investigación se concluye que los asuntos lingüísticos afectan la claridad

y el rigor de las definiciones de los estudiantes, que las redes sistémicas permiten considerar simultáneamente un gran número de respuestas variadas y prepararlas para su descripción, agrupándolas según diversos criterios.

#### **2.4.4. La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico**

Cortés durante el 2006, realiza esta experiencia investigativa en la cual utilizó un software diseñado y desarrollado por el mismo [11] para presentar un acercamiento funcional al concepto de derivada. En este software, se resalta el aspecto gráfico y numérico de lo que es una razón de cambio, y es esta parte del software la que se experimentó con estudiantes de bachillerato, para determinar si un acercamiento del tipo numérico permitiría a los estudiantes tener un mejor entendimiento de lo que es una razón de cambio, que sirviera como preámbulo al entendimiento del concepto de derivada.

Los objetivos de la experimentación fueron dos:

1. La amigabilidad y facilidad de navegación en el software (experimentar la interfase).
2. Evaluar si el enfoque propuesto en el prototipo informático al concepto de derivada tenía un contenido educativo motivador e interesante para los estudiantes.

A través del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan y usen lo que es una razón de cambio y con esto empezar a construir una nueva función y a partir de ella introducir la función derivada.

Los resultados preliminares obtenidos dan indicios de que los acercamientos numéricos proporcionan información visual de gran valor en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos.

### **2.5. Problema de investigación**

En la historia de las matemáticas, el descubrimiento del álgebra posibilitó la solución analítica de múltiples problemas, por ellos, es concebida como la herramienta fundamental que permite la matematización, es decir, da el valor pragmático que constituye esta ciencia. Su utilidad puede pensarse como una relación más importante

que la del simple cálculo, ya que por su carácter variacional permite el estudio del cambio y las modificaciones del entorno, lo que conduce a describir generalidades y motiva el desarrollo de este tipo de pensamiento.

El pensamiento variacional exige cambiar el paradigma en el proceso de enseñanza, pues “la labor de enseñar, y en particular, la de enseñar matemáticas, se ha caracterizado en nuestra cultura por ser una actividad que se “hace” y que no se “describe” ... lo que hace difícil su análisis y control” [16, p. 248]. Desde esta concepción el campo de la educación matemática debe ayudar a formar un hombre capaz de cambiar, describir, interpretar, predecir consecuencias, cuantificar, modelar; que es un resultado de las acciones que pueden ser desarrolladas en el aula si el proceso de enseñanza y de aprendizaje se da comprensivamente, posibilitando que la matematización y el pensamiento variacional se desarrollen conjuntamente.

Es por este motivo que se busca el desarrollo de una propuesta de investigación en donde **la razón de cambio** sea comprendida desde su matematización y relación contextual. Vinculando estos dos aspectos se fundamentan las bases necesarias para los conceptos previos del cálculo, admitiendo de esta forma que pertenecemos a “... un mundo dinámico en permanente transformación que ha constituido el escenario propicio para que el hombre se sensibilice e interese por la comprensión de la variación y el cambio en el transcurso de la historia” [44].

La construcción de una conceptualización sobre la razón de cambio, asumida desde el proceso enseñanza y de aprendizaje y la matematización, relacionada con diversos contextos y con otras ciencias, inducen a implementar en el aula de clase metodologías flexibles, no transmisionistas o netamente algorítmicistas, sino que por el contrario, permitan ampliar el referente conceptual nutriendo de esta forma el pensamiento variacional. Desde las teorías y modelos educativos presentados en este Capítulo, el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión, permite generar procesos de aula que posibilitan la comprensión de conceptos y por ende los estudiantes logran aprendizajes significativos.

Este enfoque metodológico ha sido adoptado en la presente investigación buscando que los alumnos de grado noveno (9º) de Básica Secundaria de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa, logren la conceptualización de la razón de cambio desde el desarrollo de un trabajo de aula que vincule **la variación** de magnitudes para dotar este proceso de significado. Es decir, realizar una ampliación conceptual y a la vez contextual, con el ánimo de lograr que el proceso de enseñanza y de aprendizaje en el que se encuentra inmerso cada estudiante le posibilite adquirir un sentido propio y a la vez universal del objeto de estudio para que pueda comunicar las comprensiones obtenidas en su entorno social.

Es importante reconocer que la EpC, es un marco metodológico que responde a las

necesidades formuladas, pues enmarca el trabajo de aula en una relación biunívoca entre los actuantes, que permite que el maestro se preocupe mucho más que por una transferencia temática y que el alumno sea un sujeto aportante en cuanto a conocimientos y la aplicación flexible de ellos. De esta forma posibilita la valoración de los logros obtenidos, lo que a su vez conduce a que el tipo de investigación a realizar sea *cualitativa*.

Enmarcados en el currículo del grado noveno (9º) del ciclo básico de educación escolar y de acuerdo a lo establecido por las directrices del Ministerio de Educación Nacional, sección 1.3.1, página 20, la enseñanza de la razón de cambio, exige una metodología que desarrolle en los estudiantes la comprensión, teniendo presente que esta es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe, por ello todas las herramientas metodológicas implementadas y sus análisis se realizan con base en el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión. Para lograr este fin investigativo se ha dado importancia al manejo tabular, así como a la representación gráfica que conduce a expresiones que formalizan y modelan las situaciones planteadas para que “la noción de razón de cambio se vuelve accesible para todos los estudiantes comprendiendo el mundo y obteniendo entendimiento fuerte de los conceptos previos de Cálculo” [42, p. 16]. Se reconoce que el desarrollo del pensamiento variacional no es exclusivo de grado 9º, sino que por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado 1º al grado 11º, tal como se propone desde los Estándares Básicos de Matemáticas [33, p. 66].

## 2.6. Objetivos investigativos

La matematización y la relación contextual del concepto de razón de cambio, se vinculan entre sí y son la base necesaria para su conceptualización comprensiva. Desde esta perspectiva se plantean los siguientes objetivos para ser desarrollados en el marco de la EpC.

### 2.6.1. Objetivo General

Describir y analizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje para la conceptualización de la razón de cambio con el propósito de determinar la viabilidad de la implementación de una estrategia metodológica en el marco de la Enseñanza para la Comprensión.



### 2.6.2. Objetivos Específicos

1. Diseñar una estrategia metodológica para la enseñanza y aprendizaje del concepto de razón de cambio en el marco de Enseñanza para la Comprensión.
2. Conceptualizar sobre las razones de cambio desde diversos contextos, avanzando en el desarrollo del pensamiento variacional.
3. Diseñar indicadores con los cuales se pueda evidenciar avances sobre el aprendizaje comprensivo del concepto estudiado.
4. Vincular los mapas conceptuales como herramientas de evaluación de la comprensión sobre el concepto de razón de cambio.

Teniendo como base estos objetivos, el marco y las herramientas metodológicas se presenta en el Capítulo 3 a partir de la página 51 y la aplicación de la estrategia metodológica en el Capítulo 4, página 85, así mismo las conclusiones en el Capítulo 5, página 135. Los instrumentos tal y como se presentaron para la recolección de la información aparecen en los Apéndices a partir de la página 149.



---

## Capítulo 3

# Marco metodológico

---

**E**N este capítulo se presenta la Enseñanza para la Comprensión (EpC) como marco metodológico del presente trabajo de investigación. Se describen las partes que la conforman: las dimensiones y los elementos. También, se presenta el diseño elaborado para la conceptualización de la razón de cambio, aplicado a estudiantes de noveno grado de Básica Secundaria de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas, Antioquia. Además, se hace una reseña sobre los pretest, los pos-test, los mapas conceptuales y las matrices de evaluación utilizados como herramientas de indagación, valoración y síntesis, que permitieron explorar los procesos de comprensión de los alumnos participantes en el proyecto de aula.

La Enseñanza para la Comprensión es una metodología que amplía la visión del currículo, reconociendo múltiples relaciones de éste con el entorno para contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos o unidades temáticas. De este modo el profesor enriquece su experiencia docente, presentando los conceptos de acuerdo con las necesidades e intereses de la comunidad en la que participa y no de forma aislada y transmisionista. De otro lado, los alumnos participan activamente en su propio aprendizaje aumentando “la capacidad de desempeño flexible” [7] que les permite utilizar el nuevo conocimiento para solucionar creativamente diversos problemas de su entorno y de esta forma ampliar su red conceptual.

### 3.1. La Enseñanza para la Comprensión

En el Capítulo 2, (pág. 35) se expusieron diversas alternativas metodológicas que permiten presentar el concepto de razón de cambio en el aula de clase. La Enseñanza para la Comprensión es una de ellas. La enseñanza de las matemáticas en la educación básica, tiene como uno de sus objetivos que el estudiante se inicie en el reconocimiento

de fenómenos que cambian cuantitativamente y que pueden ser modelados partiendo de los conceptos previos aprendidos a lo largo de su formación académica, es decir, la razón de cambio inicia al alumno en la percepción de modificaciones que sufre su entorno y que pueden ser medidas. Esta relación de la razón de cambio con el contexto es el eje del presente trabajo de investigación.

El marco de la EpC se definió alrededor de 1990 en la Universidad de Harvard, bajo la dirección de Howard Gardner y Thina Blithe [7]. Es uno de los resultados más importantes del denominado Proyecto Zero desarrollado con la intervención de la Universidad y diferentes centros educativos de su área de influencia. Esta metodología se fundamenta en la convicción de que las escuelas deben comprometer a los alumnos en su propio aprendizaje y fortalecer la comprensión como habilidad central de su formación. Esto implica que el profesor debe promover acciones que conduzcan al desarrollo de habilidades de comprensión a través de actividades que sean significativas en la vida diaria de cada uno de ellos.

Esta metodología está compuesta por cuatro (4) dimensiones y cuatro (4) elementos. Las dimensiones son: las redes conceptuales, los métodos de producción de conocimiento, la praxis y la comunicación. Los elementos están compuestos por: los hilos conductores, los tópicos generativos, los desempeños de comprensión y la valoración continua y evaluación final. La integración de estas dos partes del marco metodológico le permiten al maestro crear una ruta de aprendizaje que facilita el desarrollo de actividades que conducen a la comprensión de los significados de conceptos en el área de conocimiento en la que se aplica. A continuación se presentan las dimensiones, los elementos de la EpC y algunos ejemplos de aplicación a diversos tópicos de conocimiento.

### 3.1.1. Dimensiones

Las dimensiones se reconocen como los ejes donde el profesor centra su propuesta o estrategia de enseñanza. En su planeación busca que las actividades practicas partan de las necesidades e intereses de los alumnos, iniciando la construcción de experiencias de aula que fortalecen el desarrollo de habilidades de pensamiento relacionadas con los saberes disciplinares. Es importante tener presente que para el diseño de las dimensiones de una unidad o curso se debe partir de la construcción y reconstrucción de tareas que se relacionen con el contexto, definiendo los objetivos que se pretenden alcanzar en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

A continuación se describen y se presentan ejemplos de cada una de las cuatro (4) dimensiones que forman parte del marco de la EpC.

### Las redes conceptuales

Es reconocido por expertos [2], que el aprendizaje se convierte en una actividad significativa cuando el estudiante realiza conexiones directas entre los conocimientos previos adquiridos a través de diferentes medios – como cursos realizados con antelación, vivencias familiares, interacción con el entorno y medios de comunicación, entre otros – y los que surgen al involucrarse en la comprensión de una materia o curso en el ámbito escolar. Esta relación potencia la comprensión y la asimilación de nuevos conceptos permitiendo aplicarlos en la solución de problemas que de otra forma no se podrían abordar. Es evidente que éste proceso requiere del diseño de actividades en contexto y para ello el profesor debe involucrar estrategias que le permitan organizar los materiales y contenidos que van a ser aprendidos.

En el marco de la EpC, las redes conceptuales permiten determinar el orden en que se definen los ejes temáticos que serán abordados durante la experiencia de aula y su relación con el contexto, clasificando cuales son los conceptos relevantes y/o palabras clave, además de las relaciones entre éstas. Esta dimensión hace énfasis en la estructura conceptual de una disciplina y muestra cómo los conceptos se diferencian entre sí, determinando una jerarquización que facilita el aprendizaje de los mismos.

El profesor con esta dimensión tiene un recurso para la planeación del trabajo, pues debe reflexionar sobre aquello que quiere que lleguen a comprender sus alumnos, priorizando las temáticas a estudiar, lo que le ayuda a elaborar rutas de aprendizaje en forma jerárquica donde el proceso está centrado en un concepto básico que parte de otros más generales e inclusivos, nutriendo conceptualmente el proceso de aprendizaje para lograr que el estudiante haga explícito el nuevo conocimiento y de esta forma amplíe su red de relaciones.

En el caso de la ciencias naturales, en el área de Física, la dinámica es uno de los conceptos relevantes. A partir de él se determinan relaciones con sus leyes, características, unidades de medida, procedimientos y ejemplos, que permiten vincular al contexto con otras propiedades físicas como la velocidad, la aceleración, la estática, entre otras. Realizar una jerarquización adecuada conduce a que los estudiantes comprendan la dinámica más allá de lo teórico, permitiéndoles entender sus efectos en diversas situaciones de la vida diaria y ayudándoles a solucionar diferentes problemas relacionados con el tema.

### Métodos de producción de conocimiento

La palabra método significa literalmente “Camino o vía para llegar más lejos; hace referencia al medio utilizado para alcanzar un fin” [20, p. 679] y debemos reconocer

que cada una de las disciplinas tiene un método, una manera específica de construir conocimiento, atendiendo a criterios que garanticen que lo que se conoce es válido.

El trabajo del profesor en esta dimensión se basa en considerar alternativas que puede seguir para exponer los conceptos propios del área. Se busca que los estudiantes realicen aplicaciones en situaciones reales. Las experiencias deben posibilitar opciones para validar de manera convincente, justa y/o bella lo que se ha comprendido. Se pretende que “más que percibir el conocimiento como incuestionable, información fácil de conseguir registrada en libros de texto, los alumnos construyan y validen descripciones dignas de confianza” [46, p. 18].

Una clave fundamental que debe tener presente el profesor para que los estudiantes lleguen a la construcción de conocimientos, en la forma descrita, es buscar el cómo se comprende un área de conocimiento, un concepto, una temática específica o sencillamente una actividad planteada, buscando que desarrollen una sana desconfianza sobre lo enseñado, que aprendan los métodos propios de cada disciplina para favorecer la investigación y el desarrollo de nuevos conocimientos.

Un ejemplo de una actividad que permite la producción de conocimiento es el estudio de las progresiones geométricas. Para iniciar a los estudiantes en este tema se les pide que construyan un hexágono regular utilizando dos botones redondos en cada lado. Luego deben incrementar el número de botones por lado agregando uno cada vez en forma sistemática, totalizando el número de botones usados en cada nueva experiencia en una tabla. Con estos datos deben encontrar regularidades que les permitan hallar una expresión general para obtener el número de botones necesarios para cualquier hexágono regular de lado  $n$  botones sin construirlo físicamente<sup>1</sup>. Con esta actividad se fomentan diversas alternativas para validar el conocimiento, ya que los estudiantes encuentran diferentes formas para la solución del problema propuesto. A partir de las soluciones encontradas deben determinar cuál de ellas es la más adecuada. Los métodos válidos producen la misma respuesta y es necesario determinar la expresión más rigurosa desde el punto de vista matemático.

## La praxis

El conocimiento permite obtener nuevas visiones del mundo, interpretarlo y redescubrirlo de acuerdo con los paradigmas propios, que pueden transformarse y/o nuevamente construirse. Este proceso requiere que se pueda llevar a la práctica lo teórico de tal manera que con su aplicación se descubran nuevas realidades, trascendiendo el acto de prácticas memorísticas. Todo lo anterior sirve como base en el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo que exista una relación directa entre lo estudiado y su apli-

---

<sup>1</sup>Situación tomada del libro Álgebra y Geometría de la Editorial Santillana. p. 32, 2004.

cación en la solución de problemas del entorno logrando un aprendizaje comprensivo.

Esta dimensión, le posibilita al profesor reflexionar sobre los usos o aplicaciones de aquello que busca enseñar, generando actividades que le den la oportunidad al alumno de explorar, crear, inventar, calcular y hasta cometer errores para corregirlos. De ésta forma se le brinda la oportunidad de mostrar la conceptualización y los niveles de comprensión alcanzados en relación con la temática tratada. De está manera el estudiante gana confianza en la utilización de las capacidades que va adquiriendo para resolver problemas.

Un caso específico en el área de castellano, se obtiene cuando se utiliza la prensa escrita como recurso informativo y literario, para identificar diferentes tipos de textos, es decir, al leer los artículos publicados el estudiante pueda clasificarlos según su estructura y características lingüísticas en narrativos, descriptivos, argumentativos, expositivos, entre otros. Con esta actividad se pone en práctica el conocimiento literario adquirido, dando cuenta del nivel de comprensión alcanzado en la distinción de las diferentes formas de presentar información escrita.

### **La comunicación**

Existen diversas formas de comprender y de expresar lo que se comprende, esto conlleva a que la comunicación sea una herramienta que complemente ésta habilidad de pensamiento. En el acto educativo, esta dimensión es fundamental para la dinámica discursiva que se da entre los profesores y los estudiantes, puesto que le corresponde al primero comprender lo formulado por los estudiante y a su vez a estos lo expuesto por el profesor en forma individual.

Para el trabajo en esta dimensión es necesario analizar los procesos mediante los cuales los estudiantes logran comprender más fácilmente. Se deben de determinar actividades de tipo comunicativo en las que se apoyará el desarrollo de la temática. Desde esta perspectiva se reconoce el valor de transmitir el conocimiento a través de diferentes formas de expresión, teniendo en cuenta el público o la audiencia objeto de la comunicación. Entran en juego el lenguaje específico de cada área de conocimiento, pero atendiendo los intereses y/o necesidades de los sujetos involucrados en el proceso.

En esta dimensión, se debe tener presente que con la ayuda de la tecnología, cada día se desarrollan nuevas formas de comunicación, de las que tanto el profesor como los alumnos deben apropiarse para poder mejorar la comprensión de las áreas de estudio, posibilitando que “la tecnología pueda jugar un invaluable papel en los esfuerzos educativos, permitiendo que los estudiantes soporten los avances de su entendimiento enfrentando las dificultades conceptuales a partir de la experiencia” [36, pp. 69 - 92].

Algunas situaciones inmersas en esta dimensión son las exposiciones realizadas por los estudiantes con materiales de apoyo como diapositivas, carteles, grabaciones, maquetas entre otros. Las discusiones planteadas ya sea en grupos de trabajo o en general o abiertas en el aula de clase son otra herramienta con la que el profesor puede observar diferentes formas de comunicación para evaluar la conceptualización alcanzada en el área de trabajo.

En las diversas áreas de conocimiento la comunicación es un elemento presente en las etapas del proceso de enseñanza y de aprendizaje. Cada actividad se discute y al finalizar del curso y/o unidad los estudiantes mostrarán los avances alcanzados en relación con la comprensión de los conceptos abordados por medio de exposiciones, presentaciones y demás intervenciones que permitan poner de manifiesto los niveles obtenidos durante el desarrollo del trabajo.

### **3.1.2. Elementos**

Los elementos son considerados como las ideas clave que permiten diseñar y organizar las experiencias en el aula para que tengan sentido y puedan ligarse entre si. Es decir, con ellos se busca analizar y construir un currículo que cuestione de manera creativa aquello que el profesor enseña y a su vez el estudiante aprende, además de las estrategias que serán utilizada para evaluar este proceso, buscando que la comprensión como habilidad de pensamiento se fortalezca en el acto educativo.

Los cuatro elementos son los hilos conductores o metas de comprensión abarcadoras, los tópicos generativos, los desempeños de comprensión y la valoración continua. A continuación se describe su funcionalidad dentro de este marco metodológico de la EpC.

#### **Hilos conductores o metas de comprensión abarcadoras**

Los hilos conductores o las metas de comprensión abarcadoras hacen referencia a lo que realmente vale la pena comprender, pues ayudan a precisar las comprensiones que debería desarrollar un estudiante durante un curso, al mismo tiempo permiten identificar las aplicaciones más importantes que los estudiantes obtienen de sus aprendizajes.

Se pueden construir en forma de preguntas abiertas o afirmaciones y se diseñan para un curso entero, un semestre, el área, el ciclo y el grado o temática específica de tal manera que permitan indagar por diversos ámbitos. Una buena lista de hilos conductores lleva a la integración de la materia, de la enseñanza y del aprendizaje con



lo propuesto por los libros de texto y con aquellas situaciones de la vida cotidiana que tengan una relación directa, centrando la comprensión en los intereses y motivaciones de los estudiantes.

Una manera de formularlos es respondiendo preguntas del tipo: “¿Cuáles son las cosas más importantes que quiero que se lleven consigo los estudiantes cuando termine el ciclo de enseñanza? [4, pp. 28 - 37], lo cual puede conseguirse después de revisar las unidades planeadas y de las respuestas dadas por los estudiantes acerca de las expectativas propias al tomar el curso.

Algunos ejemplos de hilos conductores<sup>2</sup>, son los siguiente:

- Para un curso de ciencias: “Los estudiantes comprenderán que hacer ciencia no es un proceso que consiste en buscar hechos sino construir y demostrar teoría.”
- Para un curso de algebra: “¿Cómo usar lo que sabemos para calcular lo que no sabemos?”
- Para un curso de literatura: “Los estudiantes comprenderán cómo las metáforas configuran nuestra manera de experimentar el mundo.”

En todas las áreas y niveles de escolaridad es posible determinar hilos conductores, los que se relacionan con los objetivos de cada asignatura. La amplitud formulada en cada uno de ellos, depende de la visión que posea el docente sobre las formas de relacionar el currículo a su cargo con otros temas o áreas de conocimiento y con el entorno.

### Tópicos generativos

Son los temas, cuestiones, conceptos, ideas y preguntas que proporcionan las significaciones o conexiones necesarias para lograr la integración entre unos temas y otros y al mismo tiempo generan en el estudiante inquietudes que al solucionarlas mejoran sus niveles de comprensión. Se les denomina *tópicos generativos* debido a que su nombre conduce a crear conexiones, relaciones, intereses y necesidades entre diversos tipos de conocimiento, lo que implica una motivación para indagar sobre conceptos relevantes del curso o unidad.

Los tópicos generativos deben ser apasionantes para el maestro y fuente de motivación para los alumnos. Están relacionados con sus necesidades e intereses personales. Además, deben ser fáciles de abordar a partir de los recursos disponibles en el lugar de trabajo.

---

<sup>2</sup>Ejemplos tomados de <http://learnweb.harvard.edu/andes/tfu/info3.cfm>. Junio 6 de 2008

Para su planeación es posible partir de una lluvia de ideas que postule los intereses del docente y de los estudiantes, con ellos se debe construir una red de relaciones que indique la forma como los conceptos se jerarquizan. Lo que en principio puede ser elemental. Durante el proceso pueden refinarse, por ejemplo, cuando se defina qué es lo más importante del curso o unidad de trabajo. A partir del concepto que permita la mayor conexión de ideas se buscan tópicos “capaces de suscitar polémicas, que admitan múltiples y diferentes perspectivas, que no se presten a una *única respuesta correcta* y que les exijan a los estudiantes formular sus propias opiniones”.<sup>3</sup>

Pueden tomarse de referencia las siguientes situaciones:

- En biología: la definición de vida, selvas tropicales, dinosaurios, especies en vías de extinción, calentamiento del planeta.
- En matemáticas: patrones, igualdad, representaciones con signos y símbolos, tamaño y escala.
- En historia: desastres marítimos, supervivencia, revolución, conflictos, poder.
- En literatura: interpretación de textos, cuentos populares, humor, perspectivas múltiples.

En la definición de este elemento, es posible que el maestro tenga inconvenientes en definir relaciones con algunos temas que tienen pocas conexiones con otros de la misma unidad o con el curso en general. Una forma para solucionar este impase es reconocer el concepto más abarcador que movilice el pensamiento y al mismo tiempo permita establezca claras relaciones con el contexto.

## Desempeños de Comprensión

Los desempeños de comprensión son actividades que exigen a los estudiantes usar sus conocimientos previos para solucionar nuevos problemas en situaciones diferentes. Con ello se busca que demuestren el grado de comprensión adquirido en el dominio de un tópico generativo.

En los desempeños de comprensión, los estudiantes reconfiguran, expanden, extrapolan y aplican lo que ya saben, desafiando los prejuicios, los estereotipos y el pensamiento esquemático y rígido de la evaluación tradicional. Esto le brinda al docente y a los estudiantes la oportunidad de constatar el desarrollo de la comprensión a lo largo del tiempo, en situaciones nuevas y desafiantes.

---

<sup>3</sup>Tomado <http://learnweb.harvard.edu/andes/tfu/info3c.cfm>. Junio 6 de 2008.

Este elemento de la Enseñanza para la Comprensión, debe estar vinculado con:

- Las metas propuestas.
- La creación de algo nuevo, que le permita al alumno conjugar el conocimiento aprendido con los conocimientos previos.
- Los procesos de verbalización y comunicando en diversos niveles con lo aprendido siendo consecuentes con las comprensiones alcanzadas.

Para alcanzar paulatinamente los desempeños de comprensión, es necesario determinar momentos en el aprendizaje que respondan a actividades de exploración, de investigación guiada y de síntesis. Estas actividades se pueden formular como un proyecto que se debe realizar a lo largo del desarrollo de la unidad o curso y que se presentará al finalizar el mismo a todo el grupo.

Las *actividades de exploración* están destinadas a determinar qué saben los estudiantes sobre un tema específico y que además lo recozcan en diversas manifestaciones de su entorno. Se busca que logren la nivelación conceptual necesaria para profundizar en el tópico planteado. A su vez las actividades de *investigación guiada*, se consideran de mayor complejidad que las anteriores y pretenden determinar el alcance en la profundización de los nuevos conocimientos y la forma de utilizarlos para solucionar diversos problemas. Las *actividades de síntesis* se refieren a las acciones que están al final del proceso y permiten determinar el nivel de comprensión que los estudiantes alcanzaron durante el proceso de aprendizaje, haciendo énfasis en el análisis de las dimensiones de la comprensión y su interrelación.

### Valoración continua y evaluación final

Durante el proceso se direcciona el trabajo de los estudiantes hacia el logro propuesto en las metas de comprensión. En esta instancia se puede pedir la construcción de un portafolio como una herramienta que permite de forma sistemática recopilar todas las guías o materiales propuestos por el docente, las soluciones de las mismas, las descripciones del trabajo desarrollado, las ampliaciones teóricas realizadas que ayudan a aclarar conceptos fundamentales y las conclusiones obtenidas. Este material sirve como evidencia de los logros obtenidos en cada etapa del desarrollo de la unidad o concepto estudiado.

Este instrumento debe ser revisado por el docente para valorar los procesos y determinar los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes. Es el producto de las reflexiones que realizaron los alumnos en cada una de las etapas hasta llegar a

la producción final. Al hacer estas valoraciones no sólo se comprende el propósito de la evaluación sino que los estudiantes aprenden a buscar las mejores formas de ayudar al otro, ya que con la retroalimentación dada por el profesor, los compañeros, y mismo, se reconocen las debilidades y se trabaja de forma conjunta. De esta forma se crean nuevas soluciones y posibilidades de aprendizaje.

Visto de esta manera, la valoración continua y la evaluación final se fortalecen a través de procesos de retroalimentación contribuyendo al desarrollo de la comprensión. Por ello, debe realizarse de forma **precisa**, señalando asuntos concretos y detallados, **crítica**, cuestionando aquello que fue realizado y lo que no y la manera de hacerlo, **constructiva**, reconociendo las fortalezas y debilidades del trabajo y **sugerente**, que conducente a la búsqueda de caminos para la solución de problemas, potenciando que los logros alcanzados sean cada vez mejores.

Los lineamientos anteriormente expuestos sustentan la metodología de la Enseñanza para la Comprensión. Se pueden aplicar a diversas áreas del conocimiento y le sirven al maestro como guía para formular y desarrollar las actividades que realizarán sus estudiantes dentro y fuera del aula de clase. En el presente trabajo se utilizaron para desarrollar la propuesta metodológica para el concepto de razón de cambio, abordado con estudiantes de noveno grado de básica secundaria de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del Municipio de Caldas, Antioquia.

A continuación se presenta la propuesta metodológica fundamentada con la EpC para el concepto de la razón de cambio.

### 3.2. Estrategia metodológica para la enseñanza de la razón de cambio en el marco de la EpC

Es evidente que la Enseñanza para la Comprensión (EpC), permite el desarrollo de un pensamiento flexible que lleva al estudiante a realizar procesos de acción y reflexión a partir de experiencias significativas que pueden estar orientadas por el profesor, por sus compañeros o por nuevas actividades realizadas dentro y fuera del aula de clase.

Para el diseño de esta experiencia, que plantea la enseñanza de la razón de cambio, se tuvieron presentes las dimensiones y los elementos de la EpC descritos anteriormente.

Para determinar cada una de estas partes se expusieron diversos puntos de vista sobre la forma como se podría enseñar la razón de cambio en noveno grado (9º) de la Básica Secundaria, los diversos temas sobre los que se debía hacer énfasis y sobre el tipo de actividades que se realizarían con los alumnos para lograr la comprensión del concepto objeto de estudio. A partir de estas reflexiones y teniendo como marco

metodológico la EpC se diseñó la estrategia que se expone a continuación para el concepto objeto de estudio.

### 3.2.1. Hilo conductor

Es claro que el cambio, para la mayoría de las personas, es la alteración de algo, pero matemáticamente, ¿Qué sentido tiene?, ¿Qué conceptualizaciones permite realizar?, ¿Cómo puede ser medido? Este tipo de preguntas conducen a explorar la forma de presentar a los alumnos el hilo conductor, que los lleve a reflexionar sobre la importancia del tema y les permita determinar formas de medirlo, en los casos cuándo sea posible, y así lograr la motivación para investigar situaciones reales en las que se perciban incrementos o disminuciones.

Teniendo presente que la comprensión que puede alcanzar un estudiante no es única ni definitiva, sino que depende del trabajo investigativo realizado por el mismo, con la dirección de un profesor o con la interacción con sus compañeros, y del nivel de apropiación que vaya alcanzando a partir de los resultados obtenidos en el transcurso del tiempo, el hilo conductor se formuló de la siguiente manera:

- **Los estudiantes comprenderán a partir de incrementos o disminuciones en diversas situaciones de la vida diaria la razón de cambio.**

En el grado de escolaridad en el que se encuentran los estudiantes, lo tangible es lo más importante para lograr procesos de conceptualización y comprensión. Visualizar a partir de situaciones que normalmente perciben en su alrededor permiten avanzar en la matematización del concepto estudiado, por ello se buscó la comprensión del concepto en diversas situaciones asociadas al cambio en el contexto.

### 3.2.2. Tópicos generativos

Los tópicos definidos para el proceso de enseñanza y de aprendizaje del concepto estudiado, permiten que el estudiante indague en el contexto sobre la percepción del cambio desde lo social y cultural para determinar tipos de cambio, (Capítulo 1, sección 1.2, página 10), llevándolo a pensar en estrategias para la medición de éste. La respuesta dadas a diferentes preguntas parten de la motivación para que los alumnos integren el contexto con el aprendizaje de las matemáticas.

Los siguientes son los tópicos generativos definidos:

1. **En situaciones de la vida diaria, ¿Cómo sé que ha ocurrido un cambio?** Con este tópico se pretende hacer consciente a los estudiantes de la forma en que el acontecer diario varía y nada permanece constante, todo lo que transcurre permite que se generen cambios ya sea cualitativos, que solo pueden describirse o cuantitativos, que pueden medirse tomando como base una unidad de medida.
2. **¿Cómo puedo realizar la medición de un cambio?** En general, no se tiene necesidad de medir lo que cambia, como determinar una variación ocurrida en cualquier situación de la vida o si se realiza es por un asunto *lógico*, pero en general no hay claridad sobre el procedimiento algorítmico que hay inmerso en este hecho. Estableciendo diferencias entre el resultado final e inicial de un suceso se pretende llegar a comprender como medirlo.
3. **¿Por qué es importante medir los cambios?** El trabajo con este tópico es consecuencia del anterior, ya que si se dota de sentido la forma de realizar la medición de un cambio es porque se hace consciente la matemática que hay en este proceso, lo que conduce a pensar en la importancia de la razón de cambio y de todo lo que implica su matematización.
4. **¿Cómo puede interpretarse la división entre dos cambios?** La respuesta a esta pregunta busca que el estudiante encuentre relaciones entre dos situaciones que cambian y le de sentido a la nueva relación obtenida, denominada matemáticamente “razón de cambio”.

Los cuatro tópicos generativos indican el proceso paulatino desarrollado con los estudiantes, iniciando con la conceptualización sobre cambio hasta llegar a la medición de ellos y como su cociente define *la razón de cambio*. Este elemento metodológico es clave para determinar las metas y desempeños de comprensión ya que de éstos conceptos fundamentales se debe partir para definir las metas de comprensión que se deben alcanzar.

### 3.2.3. Metas de Comprensión

El propósito de las metas de comprensión en el trabajo investigativo responden a la necesidad de hacer explícitas las acciones que permiten que los estudiantes se mantengan enfocados en el desarrollo de las actividades propuestas y que apuntan a la profundización del concepto estudiado. A continuación se presentan las metas formuladas para la razón de cambio.

Los estudiantes:

1. **Comprenderán la diferencia entre variaciones de tipo cualitativo y cuantitativo.** Con ello se busca que diferencien los tipos de variaciones que transcurren en el entorno, unas ligadas con las descripciones sociales, personales, emocionales, entre otras, asociadas a lo cualitativo. Otras que pueden describirse con números, como el cambio en el peso de un bebe, el cambio en la estatura, entre otras, definidas como cuantitativas.
2. **Reconocerán que las variaciones de tipo cuantitativo indican incrementos o disminuciones de las magnitudes medidas.** Esta meta de comprensión es consecuencia de la claridad que alcanza un estudiante en determinar que la variación observada es cualitativa y que por lo tanto se le puede asociar un número, logrando percibir si se produce un aumento, una disminución o permanece igual.
3. **Utilizarán registros tabulares y gráficos de diversas situaciones de la vida diaria para determinar los incrementos o disminuciones de las variables asociadas.** Estas herramientas de sistematización permiten que los aspectos relacionados con la variación se perciban más fácilmente, pues de alguna forma se induce al estudiante a pensar matemáticamente en asuntos relacionados con el cambio.
4. **Identificarán razones de cambio a partir de los registros tabulares y gráficos.** De esta forma la sistematización contribuye a la matematización del concepto objeto de estudio alcanzando niveles de comprensión cada vez más altos.
5. **Comprenderán la simbolización asociada a razones de cambio.** Se pretende que los símbolos asociados a este concepto adquieran sentido práctico para los alumnos. De esta manera se definen actividades personales y colectivas en las que los estudiantes pueden afianzar los conocimientos que van adquiriendo a lo largo del proceso para mejorar su comprensión del concepto objeto de estudio.

Las metas de comprensión se diseñaron para que tuvieran una estrecha relación con el contexto. Este elemento de la EpC permite establecer conexiones con situaciones reales para despertar el interés en los estudiantes, pero la mismo tiempo evitando que sean demasiado amplios y no logren ser abarcadas en su totalidad.

#### 3.2.4. Los desempeños de comprensión y sus fases

Como se mencionó en la sección anterior 3.2.3, página 62 las actividades propuestas para los desempeños de comprensión, se formulan para ser desarrolladas en tres fases: exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis. A continuación se describe cada una de ellas:

### Fase de exploración

Con la exploración, los estudiantes deben realizar las actividades denominadas ¿Qué es el cambio?, ¿Hay variaciones?, mezcla de colores, mediciones de la temperatura, ¿Cuánto crece?, en donde debían:

- *Consultar en diversas fuentes (diccionarios, entrevistas, consultas en textos, etc.) lo que se percibe como un cambio.*
- *Entrevistar a diversas personas con el propósito de indagar sobre lo que es el cambio para ellos, la descripción que hacen y la forma como lo perciben.*
- *Reconocer en su entorno situaciones de cambio de tipo cualitativo y cuantitativo.*

Con estas actividades se inicia el reconocimiento de diversos tipos de cambio que suceden en el entorno. En esta fase, el trabajo es de carácter descriptivo y conducen a la verbalización escrita y oral de las modificaciones que permiten fundamentar diversas conceptualizaciones sobre el concepto estudiado.

### Fase de investigación guiada

Esta fase se fundamenta en el desarrollo de actividades más específicas con el fin de que los estudiantes comprendan nociones sobre el cambio, logren hacer mediciones del mismo y se acerquen a la conceptualización de la razón de cambio.

Las actividades son llamadas: el cambio climático, ¿Cuánto cada cuanto?, el triángulo que cambia, mucha distancia, mucho tiempo o mucha velocidad, con ellas se pretende:

- *Determinar la razón de cambio subyacente de una situación seleccionada, apoyados en registros tabulares, representaciones gráficas y simbolizaciones.*

Con estos desarrollos se busca que utilicen la matematización asociada al cambio y de esta manera crear en ellos la necesidad de la formalización, ligándolos con situaciones y relaciones que permiten la conceptualización de la razón de cambio.

### Fase del proyecto final de síntesis

Esta fase tiene como objetivo fundamental la socialización, mediante una exposición, de los procesos seguidos por grupos de cuatro (4) estudiantes para reconocer la razón de



cambio en una situación del contexto seleccionada con antelación, además de clasificarla en constante o variable realizando todo un proceso de formalización con la variables trabajadas.

En esta fase del proceso, los desempeños de comprensión desarrollados fueron:

- *Seleccionar una situación del entorno en la que se evidencie un cambio cuantitativo.*
- *Exponer a sus compañeros el proceso desarrollado para medir y definir razones de cambio.*
- *Determinar relaciones con otras situaciones del contexto.*

También se incluye en esta fase una última actividad que propone varios enunciados para que ellos aplicaran lo aprendido y así lograran determinar la razón de cambio asociadas a ella. Esta actividad se denomina en la guía metodológica ¿Qué varía?

### 3.2.5. Valoración Continua y evaluación final

Con anterioridad, en la subsección 3.1.2, página 59, se expuso que la valoración continua y evaluación final son una ruta para que el estudiante alcance los desempeños de comprensión planteados.

En el proyecto de investigación realizado, en la fase de exploración se valoran las consultas y la coherencia del discurso empleado por cada uno de los participantes. También se tendrán en cuenta las entrevistas realizadas a diferentes personas por cada estudiante. Estas actividades permitirán iniciar la elaboración conceptual del cambio en forma individual y colectiva. Se involucraron conceptos fundamentales para el desarrollo del trabajo como son: variación, incremento, disminución, cambio cualitativo, cambio cuantitativo, variable, constante, rata, razón, entre otras.

Una vez terminada la actividad de socialización y el desarrollo de la fase de exploración, que busca el fortalecimiento del lenguaje y de los procesos de verbalización referidos al cambio, se propondrán otras actividades relacionadas con la descripción y caracterización del cambio cualitativo y cuantitativo para determinar cuales tienen mayor trascendencia en el campo matemático, buscando asociarles unidades de medida y encontrando posibles relaciones entre ellas.

Para la valoración del desarrollo de las actividades de investigación guiada, los estudiantes leerán el cuento “Un calor achicharrante”, encontrado en la web<sup>4</sup> y realizarán

---

<sup>4</sup>Tomado de <http://www.educacioenvalores.org>, formato PDF. Septiembre 24 de 2007.

ampliaciones sobre el calentamiento global, describiendo las causas que lo generan. Además, buscarán datos numéricos desde el 2000 hasta el 2007 con el fin de realizar un registro tabular y gráfico de este fenómeno natural y determinar los incrementos o disminuciones ocurridos durante este lapso de tiempo. En esta instancia se apreciará la destreza que pueden alcanzar los estudiantes para el manejo y sistematización de la información. Cada grupo expondrá a sus compañeros los materiales elaborados en la compilación de datos y las conclusiones obtenidas. En esta instancia deberá notarse las ampliaciones conceptuales en los estudiantes y cambios en los niveles de verbalización referidos al concepto estudiado.

Otras actividades que complementarán esta fase están mediadas por herramientas tecnológicas (TIC'S) y buscarán ahondar en la comprensión de las razones de cambio. Los grupos de trabajo conformados por los estudiantes deberán dar cuenta de sus desempeños respondiendo las preguntas propuestas y socializándolas con los demás compañeros.

Para la evaluación del proyecto final de síntesis, los estudiantes realizarán un estudio de una situación en donde se perciba la variación cuantitativa de dos magnitudes, ya sea de forma constante o variable y, procurarán llegar a la simbolización de la misma. Esta actividad se realizará de acuerdo con los intereses y vinculaciones que tengan al contexto, buscando que definan con sus propias palabras la razón de cambio. Es de anotar que esta actividad se expondrá a los demás compañeros. Como material de apoyo diseñarán una representación a escala de la situación seleccionada con el fin de facilitar la comprensión de la misma.

### **Criterios para la valoración continua y evaluación final**

Para que la valoración cumpla con el propósito definido en el trabajo desarrollado, tanto por los estudiantes como por el profesor, debe cumplir con las características dadas en la sección anterior 3.1.2, página 59, y buscando que el estudiante mejore cada vez más en los desempeños de comprensión. Los siguientes criterios se concertaron con los estudiantes en la experiencia para la valoración continua:

1. Después de la realización de cada actividad los estudiantes deberán exponer los avances y su relación con los desempeños de comprensión propuestos. Esto se fortalecerá con los aportes dados por cada uno de los grupos.
2. Cada grupo realizará un informe escrito en el que describirán el proceso realizado para hallar la solución de la actividad propuesta. Además, de las conclusiones obtenidas en cada socialización. Estos dos insumos serán valorados para determinar la comprensión alcanzada por los estudiantes.

3. Entregarán un portafolio (p. 67) con los desarrollos obtenidos en cada una de las diversas actividades que conforman cada fase, en donde se evidenciará el trabajo desarrollado y el proceso llevado a cabo para plantear la solución que presentarán en el proyecto final de síntesis. En cada fase el profesor revisará cada una de las actividades realizadas por los estudiantes con el fin de caracterizar la evolución de la comprensión en forma individual y colectiva del concepto objeto de estudio.

Estos criterios están directamente relacionados con los expuestos en las matrices de evaluación, que integran la verbalización, la conceptualización y la solución de problemas como ejes que direccionan el trabajo evaluativo. Estas relaciones se describen en la página 78 del presente capítulo.

### **El portafolio como herramienta de la valoración continua**

El portafolio, puede definirse:

*“Como una herramienta para registrar, evaluar y mejorar los trabajos. Son colecciones de trabajos especializados y orientados hacia un objetivo, que capta un proceso imposible de apreciar plenamente a menos que uno pudiera estar dentro y fuera de la mente de otra persona. Esta herramienta convalida las expectativas actuales y legitiman las metas futuras. Constituyen una historia en desarrollo. Son fluidos, aunque pueden congelar un momento y hacerlo ver como si tuvieran un principio y un final definidos. Son los museos de nuestro trabajo y nuestro pensamiento, en los que se exhiben nuestros éxitos, experimentos y sueños. Los portafolios son espejos, aunque sean deformantes, de una realidad en evolución. Nos muestran lo que queremos ver y lo querríamos no ver. Además de ser un reflejo del yo” [29, p. 17].*

Para esta investigación los portafolios, por un lado, le permiten al estudiante tener registros de su proceso de aprendizaje y comprensión de los objetos de estudio. Por otro, el maestro puede valorar la calidad de la información recopilada por los estudiantes, la forma como la sistematizan, las conclusiones obtenidas del trabajo realizado y los niveles de comprensión alcanzados por los sujetos involucrados en la experiencia de aprendizaje. En este sentido es un instrumento que permite hacer un seguimiento continuo tanto del proceso de enseñanza como del de aprendizaje. En el presente trabajo, el portafolio se dividió en tres fases: exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis.

Para cada una de las fases del portafolio se determinaron tareas específicas, que deberían ser desarrolladas tanto individual como colectivamente, las mismas que se presentan a continuación:

**En la fase de exploración**, los estudiantes desarrollan diversas actividades para comprender la diferencia entre las variaciones de tipo cuantitativo y cualitativo. En las variaciones cuantitativas perciben incrementos o disminuciones de las magnitudes medidas. Cada grupo amplió la información reconociendo conceptos fundamentales para el desarrollo del trabajo como cambio, incremento, disminución, magnitud, cualitativo, cuantitativo entre otros. En la primera parte del trabajo, aparece el desarrollo individual de la consulta y entrevistas realizadas por cada miembro del grupo, pero como equipo deben consolidar esta información y unificar conceptos por medio del consenso. Todo este material es recopilado en el portafolio con la solución de las actividades propuestas para esta fase.

Para la **fase de investigación guiada**, se desarrollan varias actividades que buscan que los estudiantes se relacionen con situaciones medidas en intervalos y logren cuantificar la magnitud de cada uno de ellos y reconozcan razones de cambio constantes o variables. En esta parte del proceso se da inicio al fortalecimiento matemático del concepto de cambio, debido a que se trabaja con registros tabulares, gráficos y algebraicos. Este proceso se realiza en primera instancia en relación al calentamiento global, por lo que todo el material bibliográfico conseguido debe ser archivado en el portafolio, de la misma forma que el desarrollo de las guías de trabajo de clase, lo mismo que los resúmenes de cada sección en las que se trabajen los conceptos estudiados.

En esta fase, los grupos de trabajo inician la planeación de un diseño concreto relacionado con una situación del contexto en donde se puedan medir las modificaciones. El docente servirá de guía en la selección del material para ayudar a los alumnos en la consolidación de su trabajo. Esta actividad hace parte del proceso de la evaluación final.

Para **Fase del proyecto final de síntesis**, con base en la información consultada por los estudiantes con relación a situaciones de la vida diaria propias de las ciencias naturales, la economía, la geometría, entre otras. Analizan aumentos y disminuciones, realizan comparaciones para lograr la conceptualización de la razón de cambio. Además recrean esta situación, es decir, elaboran un modelo que permite la comprensión real de la situación estudiada. Este trabajo es expuesto a los compañeros.

La siguiente figura 3.1 muestra la estructura de la Enseñanza para la Comprensión y las relaciones que plantea para un aprendizaje comprensivo.

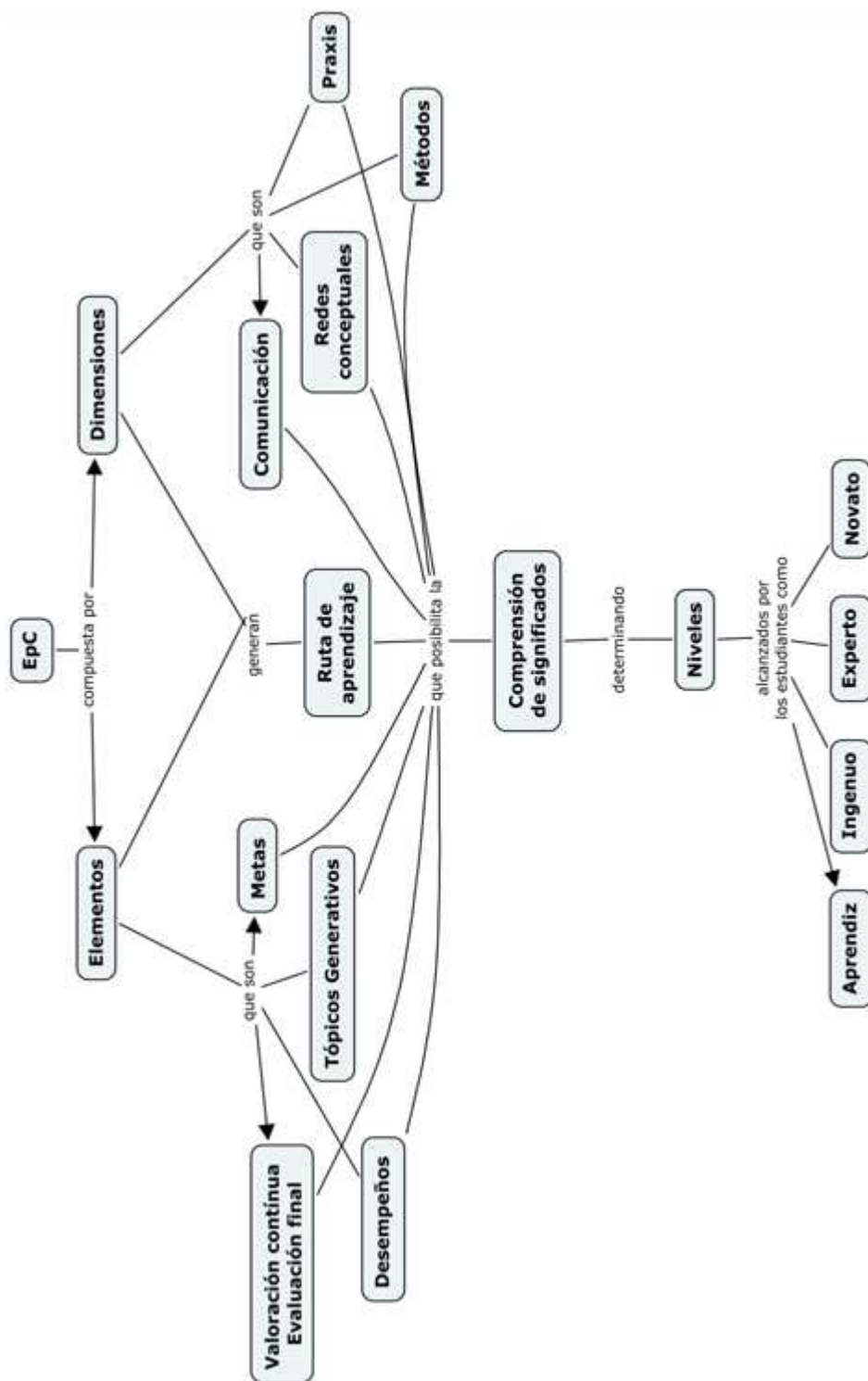


Figura 3.1: La Enseñanza para la Comprensión.

El trabajo de aula intervenido por la EpC, permite al docente orientar un trabajo activo por parte de los estudiantes. Además con el se logran diferenciar los niveles de comprensión alcanzados de acuerdo a los desempeños de los estudiantes. Estos niveles y la forma metodológica de evaluarlos se describen en la sección 3.3.4, página 75.

### **3.3. Herramientas metodológicas utilizadas durante el proceso de investigación**

En este trabajo se usaron herramientas metodológicas para determinar y analizar los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, luego de desarrollar la guía de actividades propuesta en el marco de la EpC. Es importante en toda investigación contar con recursos que proporcionen parámetros comparativos y definan el cumplimiento del objetivo propuesto en la página 48.

En este apartado se describe y presenta la guía de actividades como material utilizado por los estudiantes y el docente. También se exponen los pretest, los post-test, los mapas conceptuales y las matrices de evaluación diseñadas como herramientas para la indagación, la valoración y la síntesis. Su uso permitió explorar los procesos de comprensión de los alumnos participantes en el proyecto de aula.

#### **3.3.1. La guía de actividades**

Se entiende por guía de actividades, la colección de trabajos que deben realizar los estudiantes en cada una de las fases de aprendizaje que postula la EpC frente al concepto objeto de estudio y/o como una forma de elaboración intelectual presentada en diversos formatos. Su papel, es sistematizar conceptualmente la experiencia práctica del concepto objeto de estudio. Con este instrumento metodológico se establece un orden secuencial para la aplicación de las actividades propuestas.

Es importante resaltar, que no se conocen proyectos de investigación que hayan elaborado guías de actividades para la conceptualización de la razón de cambio en el marco de la EpC. Esto convierte la presente investigación en pionera dentro de este campo.

En este caso la guía de actividades cumple con la función particularmente útil de contribuir al mejoramiento de la experiencia en marcha y/o para facilitar la realización de los ejercicios propuestos. El siguiente diagrama presenta una visión general de como se orienta este instrumento y cual es su contenido.

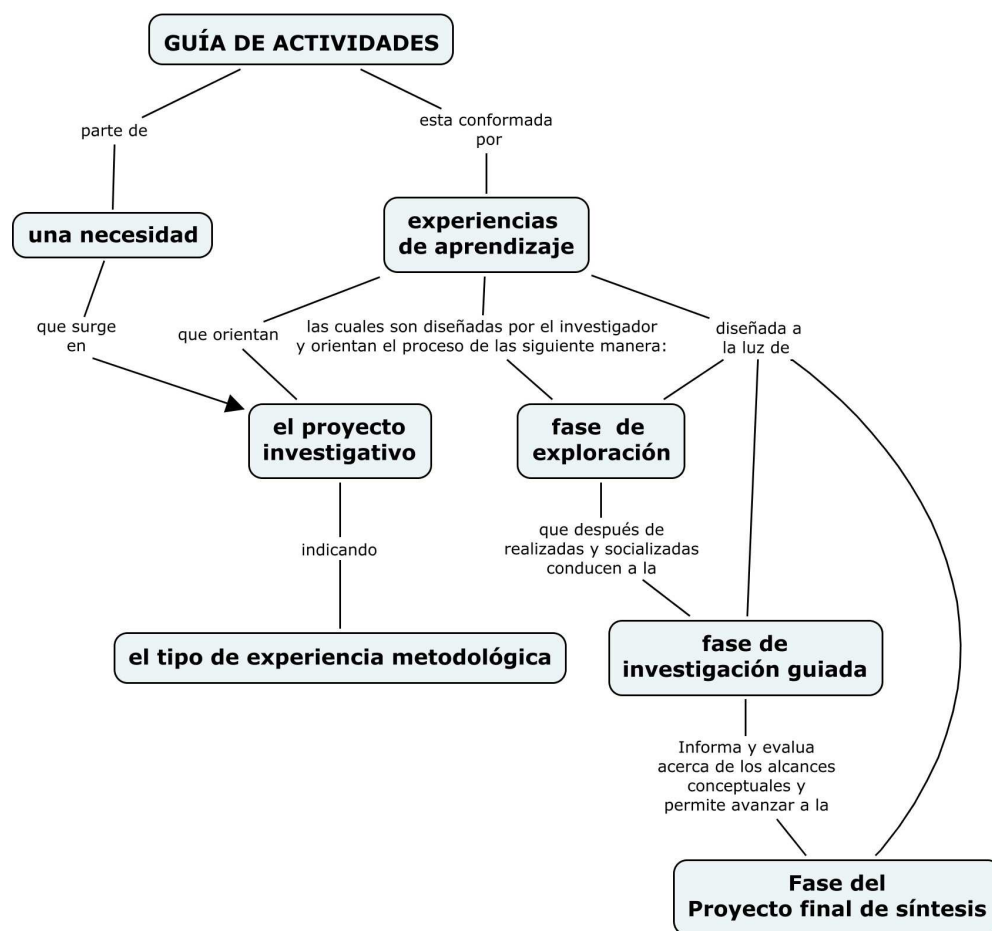


Figura 3.2: Diagrama de la composición de la guía de actividades.

En la sección 4.2 del capítulo 4, página 89 se describen cada una de las experiencias de la guía de actividades, así como los resultados de la aplicación. La guía diseñada se encuentra en el apéndice A, página 149.

### 3.3.2. Los test o encuestas de conocimiento

Los test de conocimientos se utilizan para analizar lo que los estudiantes han aprendido de forma concreta, evalúan las nociones y habilidades que han adquirido a través de los procesos de formación, las experiencias personales y profesionales. Generalmente miden los niveles desarrollados en habilidades de pensamiento como la memoria, la comprensión, la fluidez verbal, el razonamiento abstracto, el cálculo, entre otras, pero también es posible utilizarlos para determinar el grado de conocimiento que se tiene

sobre un tema o tarea específica.

A continuación se explica el uso de diferentes tipos de test empleados en el presente trabajo de investigación indicando el propósito metodológico de cada uno de ellos.

### **El pre-test y el post-test**

Un pre-test se considera una prueba realizada antes de iniciar algún tipo de actividad, en este caso cognitiva. Uno de sus propósitos es el de determinar puntos de partida para el diseño metodológico ha implementar.

El pre-test es un instrumento tipo encuesta que consta de siete (7) preguntas de conocimiento general sobre el cambio, con respuesta abierta, es decir, cada pregunta permite múltiples posibilidades de elaboración. El único requerimiento hecho a los alumnos es que deben completarlo en su totalidad, pues esto le permite al investigador reconocer la comprensión previa que los alumnos tiene sobre el cambio y la razón de cambio. La detección de estos conceptos en cada uno de los participantes es el objetivo fundamental del instrumento. Con él se indaga por la forma como el cambio puede medirse y las relaciones que establecen los estudiantes de este concepto con el contexto. En el Apéndice B, página 169 se encuentra el instrumento tal y como se aplicó a los alumnos de noveno grado (9º) de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa.

Los post-test son las pruebas ejecutadas o las mediciones tomadas después del desarrollo de las actividades planeadas. Estas son comparadas con los resultados de una prueba preliminar (pre-test) para indicar por medio de comparaciones de tipo cualitativo o cuantitativo, los diferentes efectos o cambios logrados como resultado de las actividades valoradas durante el proceso de investigación.

Una de las herramientas con las que se pretende evaluar la comprensión del concepto de razón de cambio es el post-test. Esta herramienta se aplicó en el última clase a todos los alumnos participantes, con la finalidad de conocer las posturas asumidas frente a la experiencia de enseñanza y de aprendizaje del concepto abordado. El post-test tal y como se implementó se referencia en el Apéndice C, página 173. Las respuesta del pre-test y del post-test son comparadas y analizadas en el Capítulo 5, página 135 de la presente investigación.

### **3.3.3. Mapas Conceptuales**

Los mapas conceptuales, son un instrumento educativo, que en algunos casos pueden ser considerados como un método, pues permiten ayudar a los estudiantes y a los educadores a captar el *significado* de los materiales que son objeto de estudio. Para



Novak, es la posibilidad de instrumentalizar la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, en lo referente a la evolución de las ideas previas que poseen los alumnos. Esta idea es divulgada en su libro “Aprendiendo a Aprender”, en el que pretende entre otros, un objetivo: “liberar el potencial de aprendizaje en los alumnos que permanece sin desarrollar y que en muchas prácticas educativas lo único que hacen es obstaculizarlo más que facilitarlo” [35, pp. 13 - 15]

Desde este punto de vista, los mapas conceptuales son un instrumento que facilita la evaluación formativa del alumno y admiten la detección de errores en la conceptualización y en la evolución del lenguaje empleado por ellos en el proceso educativo. La utilización de esta herramienta en el aula de clase faculta tanto al docente como al alumno para organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento del concepto estudiado, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad.

Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas, es que los sujetos asimilen diversas estructuras jerárquicas que adquieren sentido en las aplicaciones realizadas en diferentes ramas del conocimiento. Los mapas conceptuales son un medio que facilita esta labor, pues su implementación en el aula de clase permite, “Descubrir y describir relaciones significativas entre los conceptos objeto de estudio” [35, p. 43], posibilitando la creación de conexiones entre ellos y el contexto en el que se desarrollan las actividades.

Teniendo en cuenta lo anterior, los mapas conceptuales, se vinculan al proceso de enseñanza y aprendizaje de la razón de cambio. Esto dota a los participantes de una herramienta que les permite, de manera organizada, poner en evidencia diversas relaciones del concepto con sucesos del entorno. Se busca que desde las primeras etapas de la experiencia los estudiantes descubran por si mismos diferentes manifestaciones del cambio y las asocien entre sí, para establecer conexiones conceptuales que fortalezcan la comprensión del concepto objeto de estudio.

Los mapas conceptuales se abordan bajo tres finalidades: como ruta de aprendizaje, extracción de significados y/o síntesis y con fines evaluativos, las cuales serán descritas a continuación.

### Los mapas conceptuales como ruta de aprendizaje

En palabras de Novak, “un mapa conceptual también puede hacer las veces de *mapa de carreteras* donde se muestran algunos caminos que se pueden seguir para conectar los significados de los conceptos de forma que resulten proposiciones” [35, pp. 33 - 42]. Partiendo de esta premisa, se pretende construir un mapa conceptual que de cuenta del camino que deben seguir los estudiantes para alcanzar la comprensión del concepto de razón de cambio. Este mapa implica para el docente la “planeación del currículo” reflejado en sus prácticas, pues debe propiciar que el alumno cuestione ¿Qué voy a

aprender?, ¿Para qué me sirve lo que voy a aprender?, ¿Qué aplicaciones tiene esta temática con el contexto?, entre otros aspectos.

El mapa conceptual “ruta”, se socializa para que los estudiantes se planteen preguntas como: ¿Qué es un cambio?, ¿Cómo nos damos cuenta que ha ocurrido un cambio?, ¿En cuáles situaciones de la vida diaria ocurren cambios o variaciones? ¿Cuál es la importancia del cambio?, ¿Cómo se miden los cambios?, y de esta forma fortalecer el trabajo de la guía de actividades en la fase de exploración. Además, se fija en un lugar visible convirtiéndose en instrumento conductor tanto del proceso de aprendizaje como el de evaluación. En el capítulo 4, página 85 se presenta el mapa conceptual definido para tal fin en la investigación.

### **Los mapas conceptuales para extraer significados y/o sintetizar**

Estos mapas conceptuales permiten clarificar el proceso de conceptualización, pues son una actividad implementada en el aula para integrar las diferentes formas de comprensión que han alcanzado los estudiantes. Este trabajo no es de un solo momento, es un proceso paulatino, pues en algunos de los casos los primeros trabajos presentados no se pueden catalogar como mapas conceptuales, sino más bien como “mapa mental”<sup>5</sup>. Los estudiantes, en algunos casos, no construyen desde el inicio un mapa conceptual debido a que no reconocen el concepto clave. Después de varias etapas de reelaboración adquieren la habilidad para construir mapas conceptuales. Como lo afirma Novak: “En un segundo mapa conceptual generalmente se muestran las relaciones clave de una forma más explícita logrando hacerlos más claros, se corrigen los errores de ortografía y se reduce la confusión y el amontonamiento” [35, p. 52]. Este proceso conduce a los estudiantes a que revelen con claridad la organización cognitiva alcanzada.

Para la construcción de mapas con esta finalidad los estudiantes deben recopilar información de diversas fuentes (entrevista, consultas, entre otras) y de esta forma lograr sintetizar las ideas relevantes. La socialización y el análisis propicia la estructuración de jerarquías entre los distintos términos que consolidan el concepto estudiado. Con la elaboración obtenida se ponen en evidencia los logros, pues se construyen proposiciones y argumentaciones a partir del lenguaje, que son un paso previo para la comprensión del concepto. En el capítulo 4, a partir de la página 85, se encuentran los mapas conceptuales que realizaron los estudiantes para el trabajo final, además se describen las conceptualizaciones alcanzadas.

---

<sup>5</sup>Los mapas mentales a diferencia de los mapas conceptuales, se fundamentan en una sola idea y no tiene un orden jerárquico

### Mapas conceptuales con fines evaluativos

Los mapas conceptuales son una herramienta de estudio que permite sintetizar las relaciones y partes más importantes del concepto objeto de estudio. Cada uno de los conceptos involucrados en los mapas tiene un significado de acuerdo con el contexto en los que se desarrolla el trabajo.

Para cumplir este fin, deben proponerse su realización al finalizar una actividad, dando cuenta de la comprensión adquirida por los estudiantes. Además, le sirven al docente para detectar el modo como cada una de los alumnos involucrados en el proceso asume su propio aprendizaje. Del seguimiento y análisis realizado a los diversos mapas se extrae información para ayudar a los estudiantes a superar las debilidades en las relaciones planteadas o para fortalecer las ideas expuestas.

Se pretende, con esta última finalidad, que los estudiantes con la elaboración de los mapas incluyan formalizaciones y/o que las definiciones sean más rigurosas. De esta forma se puede reconocer el nivel de profundidad y comprensión alcanzada por los estudiantes.

Es evidente que desde las perspectivas descritas, los mapas conceptuales son una herramienta importante para el docente de matemáticas, porque le permiten reflexionar sobre su práctica pedagógica y construir experiencias significativas para que sus estudiantes comprendan los conceptos expuestos.

Los mapas conceptuales elaborados por los estudiantes se convirtieron en una herramienta expositiva del proyecto final realizado por cada uno de los grupos. De esta forma, permitieron evaluar niveles de comprensión, conceptualización y verbalización. Este hallazgo es descrito en los capítulos 4 y 5 en las sesiones 4.2.3 y 5.1.3, en las páginas 123 y 142.

#### 3.3.4. Matrices de evaluación

Es reconocido por los profesores que la evaluación es un elemento básico en la educación, pero en la práctica se ha limitado, casi por completo, a la realización de exámenes estructurados con el fin de medir el aprendizaje de contenidos. Este tipo de evaluación, aunque tiene aspectos valiosos cuando se la aplica correctamente, se queda corta para mostrar con mayor claridad las actitudes y logros de los estudiantes, así como su grado de aprendizaje, comprensión y competencia.

En relación con la matemática la evaluación ha estado centrada en el desarrollo de procesos algorítmicos, así como en la manipulación algebraica de los símbolos, dejando de lado otros aspectos como son la comunicación, la interpretación de los conceptos, la

aplicación con sentido de estos, la construcción y solución de nuevos problemas, entre otros.

Pensando en estos aspectos y en la necesidad de un sistema de valoración integral, las matrices de evaluación se están utilizando cada día más. Este instrumento se considera como:

*“Aquella herramienta que facilita la calificación del desempeño del estudiante en las áreas del currículo (materias o temas) que son complejas, imprecisas y subjetivas. Este instrumento podría explicarse como un listado del conjunto de criterios específicos y fundamentales que permiten valorar el aprendizaje, los conocimientos y/o las competencias, logrados por el estudiante en un trabajo o materia particular. Con este fin se establece una graduación o niveles de la calidad de los diferentes criterios con los que se puede desarrollar un objetivo, una competencia, un contenido o cualquier otro tipo de tarea que se lleve a cabo en el proceso de aprendizaje.” [30].*

La Matriz de evaluación es útil como instrumento para otorgar una cualificación pues, en primer lugar, permite que el profesor muestre a sus estudiantes los diferentes niveles de logro que se pueden alcanzar en un trabajo o actividad propuesta e indicarles específicamente lo que deben realizar, además sirven para hacer apreciaciones justas e imparciales de los trabajos de los estudiantes mediante una escala que proporciona una medida clara de las habilidades y del desempeño alcanzado. En segundo lugar, habilita a los estudiantes para que evalúen sus propias realizaciones y la calidad de las mismas.

Esta herramienta es utilizada en este proyecto de investigación en la fase del proyecto final de síntesis, presentada por los estudiantes participantes en la experiencia. Fueron evaluados por cada uno de los equipos y la profesora del curso. A los evaluadores se les entregaron tres tablas que contienen los criterios sobre los cuales se debían hacer las apreciaciones. Para facilitar la tarea, estos criterios se desglosaron en diferentes ítems, buscando que las apreciaciones fueran más objetivas. Los criterios evaluados fueron:

**La verbalización:** El manejo del lenguaje en relación con la razón de cambio utilizado en las socializaciones, respuestas a las preguntas, interacción con los diversos agentes actuantes de los desempeños de comprensión o habilidades desarrolladas. Ver matriz en el cuadro 3.2 la página 81.

**La conceptualización:** Se tuvo presente el dominio y apropiación de conceptos fundamentales asociados a la razón de cambio, logrados en la comprensión de estos y la relación posible con otros que fundamentaron el proceso. Ver matriz en la página 82.

**Solución del problema:** Se revisó el proceso desarrollado para hallar la razón de

cambio de la situación contextual seleccionada por cada grupo, además de tener presente el material elaborado para recrear dicha situación. Ver matriz en la página 83.

En el marco de la EpC, los criterios evaluados se relacionan directamente con las dimensiones. Debido a la importancia que tiene conocer lo que un estudiante debe alcanzar para demostrar que ha avanzado en la comprensión del tema trabajado, se propone el siguiente Cuadro que describen estas relaciones.

Para la EpC es importante que el estudiante tenga claridad de la forma como será evaluado, es decir, que conozca con anterioridad los criterios de evaluación con los que debe confrontar su trabajo. En la EpC los criterios de evaluación y valoración son públicos, por ello se fijan en un lugar destacado del aula de clase buscando que los alumnos los tengan como referencia para mejorar su comprensión del concepto objeto de estudio. Al mismo tiempo el docente debe relacionar estos aspectos con las dimensiones para precisar la forma de evaluación en cada una de ellas. En el Cuadro 3.1 se describen las relaciones establecidas entre las dimensiones y los criterios de evaluación en esta investigación.

Relación de las dimensiones con los criterios de evaluación			
Dimensiones	Verbalización	Conceptualización	Solución del problema
<b>Redes conceptuales</b>	Se evalúa como el estudiante comunica su comprensión del entorno con relación a los contenidos tratados, reformulando sus concepciones intuitivas.	Se perciben diferencias entre las conceptualizaciones alcanzadas por los alumnos en torno a las generalidades propias de los contenidos abordados.	Se percibe como los estudiantes aplican los contenidos comprendidos para la solución de problemas relacionados.
<b>Métodos de producción</b>	Se tiene presente como el estudiante verbaliza los métodos utilizados para lograr la comprensión del tema tratado.	Se valoran las estrategias, métodos, técnicas y procedimientos que usan los estudiantes para construir conceptualizaciones acerca del tema abordado.	Se reconocen los métodos usados por los estudiantes para dar cuenta de soluciones a problemas vinculados con el tema de estudio en diferentes contextos.
<b>Praxis</b>	Se aprecian las ideas expuestas por los estudiantes para comunicar lo que hace.	Se evalúa la visión que tiene un estudiante para poner en práctica las comprensiones sobre conceptos abordados.	Se valoran las formas cómo el estudiante experimenta con la comprensión alcanzada frente al concepto estudiado, para dar solución a problemas del entorno.
<b>Comunicación</b>	Se evalúa la precisión para comunicar ideas.	Se consideran las ideas manifestadas por los estudiantes en torno a conceptos y las comprensiones logradas.	Se analiza la forma como el estudiante comunica la solución de un problema relacionado con el concepto objeto de estudio.

Cuadro 3.1: Las dimensiones de la EpC en relación a los criterios de evaluación.

En esta investigación reconocemos que la comprensión puede entenderse como un proceso que va progresando desde lo simple hasta lo complejo, pasando por diferentes niveles que se pueden discernir por el tipo de desempeños de comprensión que es capaz de realizar una persona. Como la profundidad de la comprensión puede variar dentro de cada dimensión de la EpC, es necesario distinguir unos desempeños de otros más avanzados. Se caracterizan cuatro niveles prototípicos de la comprensión: Ingenuo, principiante, aprendiz y experto. Las apreciaciones cualitativas que se asignaron a cada uno de los criterios evaluados están relacionadas con dichos niveles y fueron los siguientes:

**Ingenuo:** Puede considerar el nivel de comprensión inferior que puede alcanzar un estudiante. En este caso no se evidencia ningún cambio respecto a la verbalización, la conceptualización y la solución del problema abordado. Puede afirmarse que el alumno sigue dominado por una visión intuitiva e inmediata del mundo. “En este nivel el conocimiento es netamente intuitivo. Describe la construcción del conocimiento como un proceso no problemático que consiste en captar información que está directamente disponible en el mundo. Los alumnos no ven la relación entre lo que aprenden y su vida de todos los días” [46, p. 239].

**Novato:** Este nivel es el segundo lugar que puede alcanzarse en la escala ascendente respecto a la comprensión. Cuando un estudiante es situado en él, es porque ha logrado desarrollos mínimos respecto a las tareas propuesta y por ende su habilidad de pensamiento no ha sido fortalecida. En esta investigación el alumno que alcanza dicho nivel, logró mínimos avances en la comprensión de la razón de cambio mostrados en los cortos desempeños relacionados con los tres criterios de evaluación. “Está predominantemente basado en los rituales y mecanismos de prueba y escolarización. Estos desempeños empiezan destacando algunos conceptos o ideas disciplinarios y estableciendo simples conexiones entre ellas, a menudo ensayadas. Describen la naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento, así como sus formas de expresión y comunicación, como procedimientos mecánicos paso por paso” [46, p. 240].

**Aprendiz:** Un estudiante situado en este nivel indica que ha logrado producciones que demuestran un avance en su conceptualización, verbalización y solución de los problemas propuestos. “Los desempeños están basados en conocimientos y modos de pensar disciplinarios. Demuestran un uso flexible de conceptos o ideas de la disciplina. Con apoyo, los desempeños en este nivel iluminan la relación entre conocimiento disciplinario y la vida cotidiana, examinando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento. Los desempeños en este nivel demuestran una expresión y comunicación flexible y adecuada” [46, p. 240].

**Experto:** Se ubican en este nivel todos los estudiantes que superan los objetivos

propuestos, es decir, que logran los desempeños propuestos y demuestran altos niveles de comprensión en cada una de las actividades realizadas. “Los desempeños son predominantemente integradores, creativos y críticos. En este nivel, los alumnos son capaces de moverse con flexibilidad entre las dimensiones, vinculando los criterios por los cuales se construyen y se convalida el conocimiento en una disciplina con la naturaleza de su objeto de estudio o los propósitos de la investigación en el dominio. Los alumnos pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea. El conocimiento es expresado y comunicado a otros de manera creativa. Los desempeños en este nivel a menudo van más allá, demostrando comprensión disciplinaria” [46, p. 241].



<div>Desempeño final de síntesis</div> <div>Matriz de evaluación</div> <div>Verbalización</div>				
Aspecto evaluado	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Experto
Manejo del lenguaje.	No usa lenguaje relacionado con el concepto abordado.	Medianamente utiliza el lenguaje relacionado con el concepto abordado.	Habla con propiedad sobre la temática.	Posee un completo dominio del lenguaje relacionado con la temática abordada.
Interacción con los diversos agentes.	Le cuesta interactuar con sus compañeros, profesores o demás personas que de una u otra forma hacen parte de la experiencia.	Pocas veces interactúa con sus compañeros, profesores o demás personas que hacen parte del proyecto.	Demuestra habilidad para interactuar con sus compañeros, profesores y otros que participan de las actividades desarrolladas.	Tiene grandes facilidades para relacionarse con sus compañeros y profesores y compartir información relacionada con el tema.
Desempeño en la socialización.	Sus aportes no son significativos para el trabajo en colectivo.	De vez en cuando aporta significativamente al trabajo en equipo o socializaciones desarrolladas.	Los aportes que realiza son muy significativos para el trabajo en equipo al igual que al desarrollo de la temática.	Las diversas formas de comunicarse en el equipo y en el desarrollo de las actividades dan cuenta del alto nivel de comprensión que posee.
Desempeños de comprensión o habilidades desarrolladas.	Solo ha logrado desarrollar una forma de explicar el problema	Muestra algunas de las habilidades alcanzadas con relación a la solución del problema seleccionado.	Manifiesta diversas formas de explicar el problema seleccionado y las relaciona con las actividades desarrolladas.	Explica el problema con tanta apropiación que permite generar nuevo conocimiento.

Cuadro 3.2: Items para evaluar la verbalización.

<b>Desempeño final de síntesis</b> <b>Matriz de evaluación</b> <b>Conceptualización</b>				
Aspecto evaluado	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Experto
<b>Dominio y apropiación de conceptos utilizados.</b>	No hay apropiación de los conceptos abordados. Se evidencia utilización de ellos de forma intuitiva.	Ha iniciado en la generación de relaciones conceptuales pero aún debe profundizar mucho más.	Se visualiza una mediana apropiación de los conceptos abordados, es decir, los utiliza de forma creativa en el desarrollo de las diversas actividades.	Maneja los conceptos estudiados de manera formal, apoyándose en ellos para la argumentación y validación de las actividades realizadas.
<b>Comprensión de relaciones entre los conceptos aprendidos y sus aplicaciones.</b>	Hay grandes debilidades para encontrar relaciones entre los conceptos aprendidos y sus relaciones con el entorno.	Es capaz de reconocer las relaciones entre los conceptos aprendidos y el entorno, pero no parece interesarse por explorar más a fondo dichas situaciones.	Comprende como puede relacionar los conceptos aprendidos con las situaciones de la vida diaria.	Muestra de manera creativa lo aprendido para situaciones similares que puedan conducirlo a generar nuevo conocimiento o nuevas aplicaciones.
<b>Desarrollo de procesos de generalización.</b>	Le cuesta considerar los conceptos utilizados con otras situaciones similares o distintas.	Comprende que puede relaciona los conceptos utilizados con otras situaciones similares o distintas, pero no tiene suficiente claridad sobre el como o cuando.	Explica como es posible relacionar los conceptos utilizados con varias situaciones de la vida diaria.	Logra relacionar los eficientemente los conceptos aprendidos con múltiples situaciones de la vida diaria, generando nuevo conocimiento.

Cuadro 3.3: Items para evaluar la conceptualización de la razón de cambio.

<b>Desempeño final de síntesis</b> <b>Matriz de evaluación</b> <b>Solución del problema</b>				
Aspecto evaluado	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Experto
<b>Comprensión de la situación contextual seleccionada.</b>	No demuestra comprender la situación seleccionada ni la importancia con el contexto.	Demuestra una comprensión mínima de la situación seleccionada y el porque es importante en el contexto .	Manifiesta comprensión de la situación seleccionada al igual que su aplicación y relación con el contexto.	Expone claramente su forma de comprender la situación seleccionada al igual que su aplicación y relación con el contexto.
<b>Estrategias planteadas para solucionar el problema.</b>	Le cuesta comprender las estrategias grupales planeadas para solucionar el problema.	Medianamente comprende las estrategias grupales planeadas para solucionar el problema.	Comprender las estrategias grupales planeadas para solucionar el problema y participa activamente el la ejecución de ellas.	Propone creativamente estrategias para solucionar el problema seleccionado.
<b>Desarrollo de la estrategia o solución de la situación.</b>	La estrategia para solucionar el problema no es la adecuada.	La solución hallada medianamente responde a la situación seleccionada.	La solución definida y las estrategias utilizadas son las adecuadas para la situación seleccionada y resuelve el problema propuesto.	Halla la de forma creativa la solución al problema propuesto logrando profundizar en la situación seleccionada.
<b>Material elaborado para recrear dicha situación.</b>	El material elaborado es pobre y no demuestra comprensión sobre la temática estudiada.	El material elaborado demuestra comprensión sobre la temática estudiada pero podría haber sido desarrollado de forma mas juiciosa.	El material elaborado permite evidenciar comprensión sobre la temática estudiada.	El material elaborado es muy creativo y permite evidenciar una amplia comprensión sobre la temática estudiada.

Cuadro 3.4: Items para evaluar la solución al problema seleccionado.



---

## Capítulo 4

# Aplicación de la estrategia metodológica

---

**E**N este capítulo se presentan los resultados obtenidos al aplicar la estrategia del marco de la EpC y las herramientas metodológicas diseñadas para la conceptualización de la razón de cambio con los estudiantes del grupo experimental. Se describen las respuestas más representativas dadas por los alumnos en los diferentes momentos de enseñanza y de aprendizaje, para determinar los niveles de comprensión alcanzados por ellos luego de participar activamente en el proceso.

Es importante resaltar que la información expuesta en este capítulo es el preámbulo para el análisis de los resultados presentados en el capítulo 5, página 135.

### 4.1. Aplicación del pre-test

Al aplicar el pre-test (Apéndice B, página 169), se pretendía indagar por la forma como el cambio podía medirse y la relación que establecen los estudiantes de este concepto con el contexto. Este propósito se relaciona con lo expuesto el capítulo 3, sección 3.3.2 página 72.

A continuación se transcriben las respuestas dadas por cinco (5) de los estudiantes durante la aplicación del pretest. Cada una de las respuestas se identifican con las letras a), b), c), d) y e) respectivamente. La selección de estos pre-test se realizó en forma aleatoria.

1. ¿Para usted qué es un cambio o una modificación?

- a) *Para mi un cambio es pasar de un estado a otro, sea bueno o malo.*
- b) *Es darle posición a algo o una alteración que adquiere algo.*
- c) *Pasar de un estado a otro.*
- d) *El cambio es una alteración en el medio.*
- e) *Es pasar de un lugar a otro alguna cosa.*

Como puede reconocerse en estas respuestas, los estudiantes asocian el cambio con diferentes estados, pero sin identificar una variación respecto a algo; es decir, no se percibe la necesidad de tener un punto de referencia para comparar el estado inicial con el final.

2. ¿De qué forma nos damos cuenta de que ha ocurrido un cambio o modificación?

- a) *Cuando las cosas dejan de ser iguales, sea para bien o para mal, notamos lo ocurrido.*
- b) *Por el aspecto de antes y después que adquiere lo que modificamos.*
- c) *Nos damos cuenta ya que las observamos y notamos el cambio.*
- d) *Cuando notamos que algo no está como es habitualmente.*
- e) *Cuando no encontramos las cosas en su sitio.*

Los estudiantes relacionan el cambio con aspectos físicos. Es decir, con modificaciones de los atributos, pero ninguno hace referencia a la necesidad de hacer un tratamiento matemático para determinarlo o medirlo; no se asume la matematización de los cambios como algo necesario en la cotidianidad.

3. Indique varias situaciones de la vida diaria en donde se producen cambios o modificaciones.

- a) *De joven a adulto, de rico a pobre, mujer a madre, de hijo a padre, tranquilidad al caos, de bueno a malo.*
- b) *En una tienda, ya que hay días en los cuales se vende más que en otros; en una empresa, con el mejoramiento de sus productos; en nosotros con las cosas que hacemos ya sea en el estudio o en cualquier otra cosa.*
- c) *En el ánimo de la gente, en construcciones, en el crecimiento de un ser vivo.*
- d) *El cambio de opinión, los espacios físicos, el cambio en el clima, en los adolescentes, los cambios hormonales.*
- e) *En el dólar que sube y baja, cambiarnos de ropa interior todos los días, el clima.*

Estas respuestas corroboran que el cambio se atribuye a modificaciones de los objetos, de las circunstancias o de las personas, pero no a la variación medible entre magnitudes.

4. Explique como puede medirse el cambio o la modificación en una de las situaciones definidas en el ítem anterior.
- a) *De pronto se puede medir el grado de intensidad y todos los cambios que se producen en el proceso.*
  - b) *En la tienda se puede medir por medio de las ganancias de las ventas, ya que si hay buena ventas aumentaría el dinero, de lo contrario no se vería nada.*
  - c) *Con metro para la altura, con peso para un bebe o animal.*
  - d) *Creando variables para poder medir el cambio que se percibe por las alteraciones que produce.*
  - e) *Entre intervalos o en la temperatura.*

Los procedimientos descritos, en ninguno de los casos se establecen puntos de referencia para determinar las variaciones ocurridas en cada circunstancia. En algunos de los casos se enuncian herramientas que pueden ser usadas para medir la magnitud del cambio existente.

5. ¿Es necesario para nuestra vida medir los cambios o las modificaciones? Si\_\_\_No  
¿Por qué?
- a) *Si. No siempre vamos a estar sin hacer nada y porque a nosotros mismos los cambios nos afectan, por eso seria bueno saber el número de las cosas que ocurren.*
  - b) *Si. Ya que nosotros estamos sometidos a cambios continuos tanto personales como públicos y también por el mejoramiento de las personas.*
  - c) *Si, para poder darnos cuenta cuánto cambian las cosas.*
  - d) *Si, ya que así podemos darnos cuenta de que tanto mejoramos o como empeoramos.*
  - e) *Si, porque nos daremos cuenta de cuánto ha sido el cambio, si mucho o poquito.*

Las respuestas son afirmativas en todos los casos. Esto permite determinar la importancia que se le da a medir el cambio, pero con las justificaciones se percibe como se ignoran las relaciones matemáticas que se pueden asociar a este concepto.

6. ¿Por qué puede considerarse importante medir los cambios o las modificaciones?

- a) *Me imagino que porque de esta manera podemos tener cifras, las variaciones del cambio y también porque en algunas áreas se necesita.*
- b) *Por qué sería bueno mantener el control de lo que cada uno de nosotros hacemos a diario.*
- c) *Como lo dije anteriormente, porque debemos saber cuánto cambian las cosas si mucho, poco o regular.*
- d) *Puede considerarse importante porque nos permite llevar un control de que tanto hemos evolucionado en nuestros procesos.*
- e) *Porque como lo dije anteriormente, nos daremos cuenta que tanto se ha dado el cambio.*

Las respuestas dadas, ratifican la importancia de este trabajo investigativo. Determinan como el cambio se convierte en un asunto que permite definir rangos o intervalos con relación a situaciones reales. Es evidente que los estudiantes involucrados no tienen la conceptualización necesaria para dar explicaciones matemáticas a los cambios que pueden surgir en un determinado experimento.

7. Hoy en Medellín la temperatura fue de 17 °C a las 6: 00 a.m., 23 °C a las 10: 00 a.m., 25 °C a la 1:00 p.m. y de 21 °C a las 7 p.m.

- 7.1. ¿Qué cambios o modificaciones se dan en la temperatura entre las 6: 00 a.m. y las 10: 00 a.m.?
- 7.2. La temperatura aumenta o disminuye. ¿Cómo se puede justificar esta situación?
- 7.3. Entre la 1: 00 p.m. y las 7. 00 p.m., ¿Qué cambio se da en la temperatura?
- 7.4. La temperatura aumento o disminuyó en este espacio de tiempo. Explica tu respuesta.

- 7.1. a) *Que de 17°C a 23°C subió la temperatura;* b) *Aumenta porque la temperatura de la mañana no es igual a la de la noche;* c) *se da un cambio de 4 grados menos de mayor a menor;* d) *disminuyo porque primero era mayor y luego menor.*
- 7.2. a) *Una de las modificaciones es que el nivel de calor o temperatura aumenta 6 °C más entre las 6:00 am y las 10: 00 am;* b) *aumenta ya que si restamos la temperatura de las 10:00 am con la de las 6: 00 nos podemos dar cuenta de que aumenta;* c) *la temperatura aumenta 6°C;* d) *Aumentó y disminuyó, ya que en las horas de la mañana y de la tarde fue aumentando hasta llegar la noche donde la temperatura baja.*



- 7.3. a) *Cambia  $6^{\circ}\text{C}$ ; b) Aumenta de 6:00 a 1:00 ya en la noche disminuye esta situación, lo que indica que durante el día aumenta pero en la noche disminuye; c) Disminuye  $4^{\circ}\text{C}$ ; d) Aumenta durante la mañana al día, ya que el sol estaba muy fuerte y en la noche disminuyó la temperatura.*
- 7.4 a) *El calor aumenta  $6^{\circ}\text{C}$ ; b) Esta situación se justifica gracias a que el día avanza y por lo tanto sale el sol; c) La temperatura disminuye  $4^{\circ}\text{C}$ ; d) Disminuyó porque el sol se esconde y pasa a la noche que es más fría.*
- 7.5. a) *La temperatura subió  $6^{\circ}\text{C}$ ; b) Aumenta, se nota haciendo un intervalo, c) Se da que disminuye  $4^{\circ}\text{C}$ ; d) Disminuyó.*

En estas respuestas se percibe como los estudiantes tienen claridad sobre los aumentos o disminuciones, en este caso asociado a la temperatura, pero no sobre el procedimiento que puede establecerse para determinar la magnitud del cambio dado. Las explicaciones que se presentan están asociadas a sus vivencias, pero no con relación a la matematización necesaria para cuantificar los eventos.

De acuerdo a las respuestas obtenidas, se pone de manifiesto que los estudiantes asocian el cambio con las modificaciones que puede tener un objeto o persona, es decir, lo relacionan con las variaciones de la forma tanto externas como internas, descuidando los procedimientos, técnicas o estrategias para hacer mediciones del mismo. En otras palabras, la variación es relacionada con el cambio cualitativo y no con lo cuantitativo.

Teniendo en cuenta los pre-conceptos y los nivel de comprensión que presentan los estudiantes, en relación con la matematización del cambio, se inicia la aplicación de la guía metodológica.

## 4.2. Aplicación de la guía de actividades

En la sesión 3.3.1, página 70, se describió el objetivo de esta herramienta metodológica. Cada una de las actividades propuestas (Apéndice A, página 149), presenta una meta de comprensión y los desempeños asociados en relación a la razón de cambio en el contexto. Estos elementos, fundamentan el hilo conductor definido en el capítulo 3, sección 3.2.1 en la página 61.

La guía propuesta se desarrolló en tres momentos: *exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis*, los que son consecuentes con el marco de la EpC. En las diferentes instancias de aprendizaje, los miembros de cada grupo de trabajo realizaron las diferentes actividades, en las que se contó con la interacción del docente. De cada situación abordada, los estudiantes, obtuvieron conclusiones a partir de lo observado, se socializaron y se confrontaron con los demás grupos de trabajo. Las ideas expresadas

demuestran la comprensión alcanzada en torno a la razón de cambio. En el transcurso del trabajo se incluyeron los mapas conceptuales para orientar y fortalecer las relaciones del concepto objeto de estudio con diversos aspectos del entorno.

A continuación se describe las actividades de la guía de aprendizaje para cada una de las tres fases del proceso.

#### **4.2.1. Aplicación de las actividades de la fase de exploración**

En el capítulo 3, página 73, se incluyen los mapas conceptuales como herramienta metodológica para explorar las conexiones y relaciones entre los conceptos que ya tenían aprendidos los estudiantes y los nuevos. Se construyó un mapa conceptual (Figura 4.1, página 91) como ruta de aprendizaje. Éste se socializó con todo el grupo de estudiantes participantes y se fijó en un lugar visible para que sirviera de guía y control, tanto en el proceso de aprendizaje como en el de evaluación.

A partir de la socialización de este mapa conceptual los estudiantes se plantearon preguntas tales como: ¿Qué es un cambio?, ¿Cómo nos damos cuenta que ha ocurrido un cambio?, ¿En cuáles situaciones de la vida diaria ocurren cambios o variaciones? ¿Cuál es la importancia del cambio?, ¿Cómo se miden los cambios?, entre otras. Estas preguntas sirvieron de orientadoras de la primera actividad de la guía.

Para construir respuestas a dichos interrogantes se le propuso a los alumnos que realizaran una entrevista a personas de diversas profesiones y oficios. Esta actividad es definida como la No. 1 en la guía, la cual se describe en el siguiente apartado.



Figura 4.1: Mapa Conceptual utilizado como ruta de aprendizaje.

### Actividad No. 1: ¿Qué es un cambio?

Esta primera actividad surge de las preguntas formuladas por los estudiantes al reflexionar sobre el mapa conceptual “ruta de aprendizaje” (Figura 4.1, página 91). Para que los estudiantes construyeran respuestas a dichos interrogantes debieron, en primer momento, realizar una consulta sobre el cambio y luego entrevistar a personas de diversas profesiones y oficios.

La primera actividad permite hacer referencias textuales de este concepto desde cualquier fuente (diccionarios, enciclopedias, internet, etc.) y situación (economía, ciencias naturales, historia, entre otras) para poder precisar la definición sobre el concepto de **cambio** en éste trabajo investigativo.

Al socializar las consultas se reconocen las siguientes definiciones en forma reiterada:

- El cambio, es el concepto que denota la transición que ocurre cuando se transita de un estado a otro, por ejemplo el cambio de estado, o de estado civil o la crisis o revolución.
- En una venta, es lo que se devuelve por el vendedor al comprador cuando ha pagado con un medio de pago mayor al valor de la mercancía comprada
- Es la posibilidad de sustituir algo por otra cosa, por ejemplo en el fútbol de cambiar un jugador por otro, o de algo averiado por uno nuevo.

Es importante resaltar que las definiciones propuestas por los estudiantes estaban asociadas con lo cultural, con las modificaciones de lo estético y del tiempo. Desde esta perspectiva se inicia el reconocimiento de una relación temporal, pues los estudiantes comparan lo que ocurre en un momento inicial de una circunstancia, con una instancia final, pero no plantean formas para relacionarlo o comprenderlo desde lo matemático.

Después de tener nociones sobre el concepto objeto de estudio, se propuso la realización de entrevistas a diversas personas del entorno de los estudiantes para indagarles sobre lo que consideran que es un cambio.

las preguntas que guiaron la entrevista fueron las siguiente:

1. ¿Qué piensa usted que es un cambio?
2. ¿En su trabajo o vida diaria como puede percibir un cambio?
3. Describa algunos cambios que percibe.

Algunas de las respuesta obtenidas, fueron:

■ **Un vendedor de frutas**

1. Para mi un cambio sería pasar de ser ventero a ser un empresario.
2. Veo el cambio cuando baja la temperatura. Si no hay estudiantes no se vende casi. Cuando hay mala cosecha de frutas suben los precios y merma el trabajo.
3. Todo ahora no es como antes, ahora di a conocer mi negocio, tengo más clientes, trabajo más y gano más.

■ **Un comerciante**

1. Pasar de pobre a rico, progresar económicamente.
2. Estar laboralmente estable.
3. Que aumente el negocio.

■ **Una religiosa**

1. Es salir de la rutina, adaptar patrones de convivencia, es un nuevo amanecer, dar un impulso.
2. Todo lo que realizo porque si vivo la rutina me doy cuenta de que no progreso.
3. Mi oración y la virgen María me da deseos de salir, de hacer algo por los demás y alegrarles la vida a las demás personas.

■ **Un tendero**

1. Por lo menos ahora la sociedad si permite trabajar de una forma más fácil y sin tantos problemas.
2. Mejora en la facilidad de trabajo y en las oportunidades.
3. Me parece todo muy bien estoy seguro que el cambio se acepta porque yo lo estoy viviendo.

De cada una de las entrevistas los estudiantes dejaron evidencias (cuestionarios, fotos, grabaciones, etc.) que expusieron a sus compañeros y guardaron en el portafolio. Concluyeron que las definiciones que dan las personas del cambio dependen principalmente de la profesión u oficio que ejerza, pues cada ser humano en su cotidianidad se relacionan con diferentes circunstancias y desde su rol concibe el cambio. Explican como los tenderos y negociantes asocian el cambio con el dinero y con las ganancias o perdidas, es decir, con el aumento o disminución de sus capitales,

pero aquellas personas que están relacionadas con lo social como los psicólogos, religiosos, padres de familia, entre otros, visionan el cambio con las modificaciones de las mentalidades, comportamiento o creencias.

De acuerdo a lo descrito por los estudiantes y la socialización entre todos los grupos de trabajo se tomó como premisa que: *el cambio es una alteración de lo común y puede ser de tipo económico, político, emocional, físico, racional, estructural, entre otras. Estas variaciones o modificaciones se perciben dependiendo del ámbito en el que se esté inmerso.*



Figura 4.2: Socialización de las entrevistas.

Se pidió a los estudiantes realizar, por equipos, un mapa conceptual que diera cuenta de lo abordado. Esto permitió visualizar las concepciones asumidas por los estudiantes sobre el tema tratado y los niveles de comprensión alcanzados, pero aún no involucraron aspectos matemáticos para determinarlo. Un objetivo del trabajo de investigación, es que lo comprendan desde el punto de vista matemático, por lo tanto las próximas actividades pretenden que los alumnos comiencen a ver las relaciones involucradas en los cambios estudiados y los cuantifiquen matemáticamente cuando esto sea posible.

Uno de los mapas conceptuales realizado por un grupo de estudiantes se presenta a continuación (Figura 4.3, p. 95). El mapa recoge los aspectos principales trabajados durante el proceso y es un ejemplo de la capacidad de síntesis lograda por los diferentes grupos involucrados en el proceso.

Con el mapa conceptual se evidenció que las actividades realizadas direccionaron la



Figura 4.3: Mapa conceptual de estudiantes presentado durante la socialización de la actividad No. 1.

concepción del concepto estudiado. Se percibe como retoman la idea de establecer un antes y después, momentos necesarios para realizar la medición de las variaciones. Se rescata que los estudiante incluyen conceptos relevantes y establecen jerarquías entre ellos, aunque son sencillas. Este mismo mapa conceptual, como herramienta evaluativa, confirmó que los estudiantes habían ganado claridad en relación al concepto de cambio y sus asociaciones con el entorno, pero aún desconociendo los vínculos matemáticos, lo que hace necesario profundizar más en el tema, para lograr los objetivos de investigación definidos.

### Actividad No 2: ¿Hay Variaciones?

La segunda actividad de la fase de exploración, buscó que los estudiantes reconocieran que hay cambios cualitativos y cuantitativos y, que a su vez logran diferenciarlos. El objetivo está centrado en la necesidad de establecer unidades de medida para conceptualizar la razón de cambio.

Se presentaron en el aula de clase tres videos, el primero mostraba la destrucción de una ciudad por un terremoto, el segundo el nacimiento de un ave desde la salida de su cascarón hasta que logra ponerse de pie minutos después y el tercero es la secuencia de construcción de un edificio.



Cada grupo de trabajo dialogó sobre las modificaciones o variaciones ocurridas y las describieron. Estas discusiones quedaron registradas en su portafolio y las socializaron con sus compañeros.

Los estudiantes aportaron:

- Respecto al video del terremoto:

LOS MAYORES CAMBIOS QUE SURGEN EN ESTE VIDEO SON LOS DAÑOS DE LAS ESTRUCTURAS, PRIMERO ERAN FIRMES Y AL PASAR EL TERREMOTO QUEDARON TOTALMENTE DERRUMBADAS.

TODOS LOS CAMBIOS DEPENDEN DE LA INTENSIDAD DEL TERREMOTO.

DESPUES DE TODO ESTAR TRANQUILAS, LA GENTE CRECE LA INSEGUROSIDAD Y LA TENSION.

- Con relación a la visualización del nacimiento de un ave :

lo que observamos fue que el nacimiento fue muy lento, y con diferentes fases a medida que iba saliendo del cascarón, tambien que todo iba cambiando, por que primero solo se veia el pico, luego las patas, luego medio cuerpo y luego todo completamente, el cambio se puede mirar que primero era un huevo y luego un pato totalmente desarrollado.

- Al observar la construcción de una edificio:

CUAN SE OBSERVA LA CONSTRUCCION DE UN EDIFICIO PODEMOS DARNOS CUENTA QUE SE DAN CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DE UN LUGAR. PRIMERO OBTENDREMOS UN TERRENO VAIDIO EN EL QUE HAY QUE SACAR TIERRA SI ESTA ES POCO FUERTE, LUEGO SE EMPIEZA A CONSTRUIR LAS BIGAS O COLUMNAS Y SE HECHAN LAS PLANCHAS DEPENDIENDO DE LOS PISOS QUE VALLA A TENER, LUEGO SE CONSTRUYEN LAS PAREDES Y HABITACIONES, LUEGO SE REBOCAN LAS PAREDES, SE CONSTRUYEN LOS MARCOS DE LAS PUERTAS, Y POR ULTIMO LAS VENTANAS Y SE PINTAN LAS PISAS.

SE NOTA EL CAMBIO EN LAS DIFERENTES ETAPAS DE CONSTRUCCION DE PASAR DE UN TERRENO VAIDIO A UNA EDIFICACION.



Al preguntarles si era posible que alguno de los cambios fueran medibles numéricamente, respondieron que si, porque cada instancia o imagen vista era un cambio que se podía expresar numéricamente. Asociado con el terremoto se puede medir el nivel de intensidad con las escalas usadas habitualmente para dar este reporte; con relación al crecimiento del animal, la altura y peso y para la construcción del edificio la altura, el área del terreno utilizado, entre otras.

Los estudiantes opinaron que la medición también se puede hacer en otras situaciones de la vida diaria. Relacionadas con la economía en lo que respecta con la bolsa de valores para determinar cambios en el precio de las acciones. Con relación a la física, en el cambio de estado de un cuerpo o en la velocidad del movimiento de un objeto.

Se interrogan por el proceso de medición de los cambios, del cual los estudiantes dicen no tener claridad y lo justifican en que no manejan muy bien las operaciones matemáticas. Uno de los grupos plantea que para “la medición de los cambios del terremoto pueden sumarse los grados de intensidad, multiplicarlos por la duración y dividir este resultado por otro igual o parecido”. Otro grupo afirma que para determinar el cambio en la vivencia del terremoto “se puede tener en cuenta el número de desastres por el porcentaje de personas afectadas”.

Estas respuesta muestran que no hay comprensión sobre la matematización del concepto de cambio, ni de la razón de cambio, lo que ratifica es que los estudiantes con sus conceptos previos, proponen y enuncian formas imprecisas para medirlo y consideran que al definir cualquier operación logran construir algoritmos para matematizar los procesos estudiados. Los resultados obtenidos hasta este momento, confirman la necesidad de orientar la investigación para ayudar a los estudiantes a que logren un nivel de conceptualización y matematización del concepto tratado.

### **Actividad No 3: Mezcla de colores**

Esta actividad se desarrolló mezclando lentamente 10 gotas de pintura amarilla con 10 gotas de pintura azul para determinar el nivel de intensidad con que varia el nuevo color. Con esta situación los estudiante hacen uso de la descripción para determinar las variaciones ocurridas (cambio cualitativo) y al mismo tiempo perciben la necesidad de la medición para definir cuánto varía la intensidad del color (cambio cuantitativo).

En esta experiencia los estudiantes describieron:

Después de soltar la primera gota de pintura azul y resolver, aparece un verde claro y a medida de que soltabamos las otras y el color verde se oscurecía.

Los grupos de estudiantes observaron que a medida que iban aplicando cada gota y el nuevo color cambiaba de intensidad, de un tono claro a oscuro, pero no lograron determinar cuánto cambió la mezcla. Reconocieron que determinar la intensidad del color no es un asunto sencillo y establecer una medida no era posible debido a que todos los grupos habían conseguido tonos diferentes.

Como las variables definidas en esta situación no pueden medirse con precisión, los estudiantes no logran determinar las variaciones en los tonos obtenidos, pero sí las describen. Esta situación posibilita mostrar los diferentes cambios que pueden ocurrir, definidos como cambios cualitativos.



Figura 4.4: Experiencia con la mezcla de colores.

Para la conceptualización de la razón de cambio son netamente importantes los cambios cuantitativos, los cuales son abordados a partir de la actividad No. 4 de la guía.

#### Actividad No 4: Mediciones de temperatura

Al contrario de la actividad anterior, esta situación permite a los estudiantes relacionar dos magnitudes, la temperatura y el tiempo. Los estudiantes pusieron a hervir un litro de agua y realizaron un registro del aumento de la temperatura cada dos minutos hasta que el líquido estuviese en estado de ebullición.

La tabla de resultados de un grupo fue la siguiente:

Tiempo (min.)	2 min	4 min	8 min	10 min	12 min	14 min	16 min
Temperatura (°C)	40	61	77	85	89	92	93

Cuadro 4.1: Registro de temperatura en aumento.

Cuando el agua llegó al punto de ebullición, retiraron el recipiente del fuego e iniciaron nuevamente un registro de la disminución de la temperatura cada dos minutos hasta que llegó a una temperatura ambiente. La tabla que elaboraron los estudiantes para esta actividad fue la siguiente:

Tiempo (min.)	2 min	4 min	6 min	8 min	10 min	12 min	14 min
Temperatura (°C)	89	85	83	81	77	72	69

Cuadro 4.2: Registro de la disminución de la temperatura.

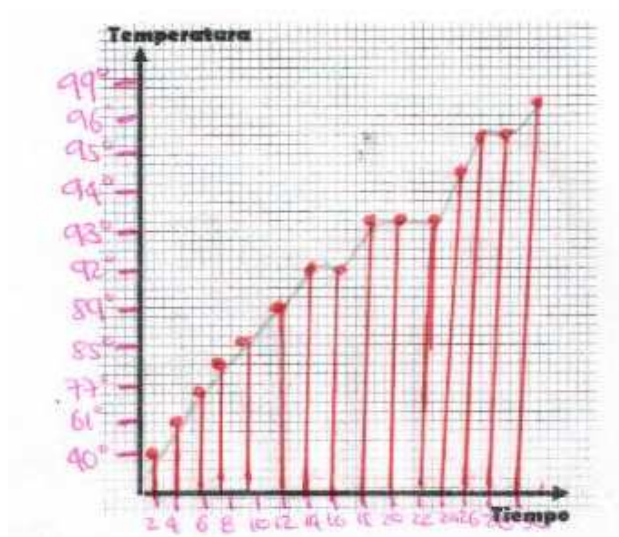
Los estudiantes notaron que la temperatura variaba a medida que pasaba el tiempo, pues esta iba poniéndose más caliente hasta llegar al punto de ebullición (aproximadamente 92°C). Lograron determinar que aumenta aproximadamente de 2°C a 5°C cada 2 minutos. En relación con el segundo momento, concluyeron que la temperatura disminuyó más lentamente, pues transcurre más tiempo para notar un cambio de temperatura.

Con esta experiencia los estudiantes iniciaron la manipulación de dos variables y la variación asociada a ellas. También lograron realizar el proceso de medición relacionado a esta situación, pues cuando se les pregunta si es posible saber cuánto cambia la temperatura del minuto 4 al minuto 10, antes de que el agua hierva, responden que deben saber cuanto marcó el termómetro en estos periodos de tiempo y al restar estos

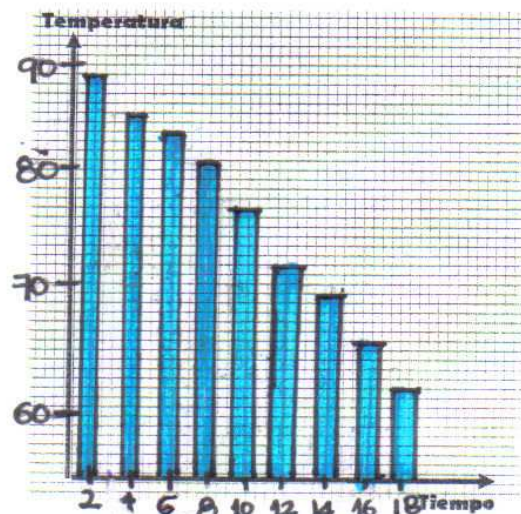
datos, partiendo del mayor a menor, pueden determinar cuanto aumentó o disminuyó y así cuantificar el cambio.

El proceso descrito verbalmente por los estudiantes esta asociado a la variación final en comparación con la inicial, que en términos de matematización es una definición básica del delta ( $\Delta(x)$ ) de cambio. Esta símbolo matemático se utiliza en las ciencias para indicar “diferencia” o “incremento”.<sup>1</sup>

Se utilizaron los resultados de la actividad, para la conceptualización de la razón de cambio desde el referente geométrico y variacional, debido a que los estudiantes construyeron, con base en las tablas, dos gráficas en donde asociaban el eje horizontal con el tiempo y el eje vertical con la temperatura. Este registro indica las modificaciones ocurridas en cada una de las experiencias. Las gráficas realizadas por un grupo fueron las siguientes:



(a) Plano 1. Aumento de la temperatura.

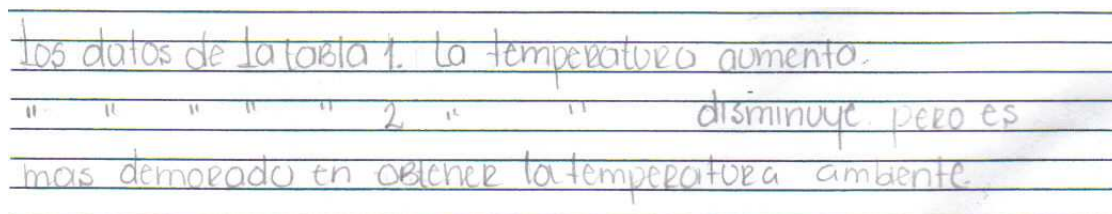


(b) Plano 2. Disminución de la temperatura.

Figura 4.5: Gráfica de aumento y disminución de la temperatura.

<sup>1</sup>Definición tomada de <http://www.ciencia.net/ImprimirArticulo/matematicas/Delta,-Símbolo?idArticulo=12>. Marzo 6 de 2009

Los estudiantes justifican de la siguiente forma el comportamiento de los gráficos:



los datos de la tabla 1. la temperatura aumento.  
" " " " " 2 " " disminuye, pero es  
mas demorado en obtener la temperatura ambiente.

En la *gráfica 1* los estudiantes mostraron el aumento de la temperatura cada dos minutos. En la *gráfica 2*, se mostraban los intervalos de tiempo iguales donde ocurrían disminuciones de la variable analizada (ver Figura 4.5).

La interpretación de los gráficos, permitió que los estudiantes descubrieran que existen diferencias entre los registros tabulares obtenidos, debido a que en uno de ellos se hace asociación con los incrementos y en el otro con los decrementos. Además, que la gráfica tuvo directa relación con esta situación, pues como se registró un aumento en las variables temperatura y tiempo, al trasladar al plano cada uno de los registros obtenidos con segmentos de línea, estos van hacia arriba, indicando que por cada dos minutos transcurridos aumentaba la temperatura. En la segunda experiencia notaron otras relaciones, pues en algunos momentos se daba una disminución significativa de la temperatura y esto se apreciaba al observar que los segmentos de la recta que unen los puntos tienen una inclinación hacia abajo. Este último suceso no ocurrió durante toda la experiencia, sino en algunos intervalos de tiempo, en algunos otros el segmento de recta tenía poca o ninguna inclinación, es decir, permanecía sin cambios. Los estudiante lograron reconocer, con este último ejercicio, que en algunos intervalos de tiempo al medir el cambio con los instrumentos utilizados se obtenían lecturas muy similares, asociando este hecho con que la temperatura no cambiaba o que su cambio era casi cero.

Con el desarrollo de esta actividad se logra conceptualizar sobre las magnitudes dependientes, independientes, constantes y directamente proporcionales. También se fundamentó como la inclinación de un segmento de recta está asociado con aumentos o disminuciones de las variables objeto de estudio.

### Actividad No 5: ¿Cuánto crece?

Desde el inicio del trabajo, se les solicitó a los estudiantes, que sembraran una semilla de frijol y se les entregó una tabla dividida en dos columnas para que registraran los cambios cada dos días. Dichas descripciones hacían referencia a la forma y tamaño que

fue tomando la planta. La duración de este trabajo fue de veinte (20) días y al finalizar la experiencia llevaron salón de clase la planta para socializar los registros obtenidos.

Esta actividad buscó que los estudiantes diferenciaron los cambios cualitativos, asociados a la forma que iba tomando la planta a medida que crecía y a cambios cuantitativos, asociados a la altura. Con este trabajo se pretendía caracterizar el aprendizaje con la medición de los cambios asociados a situaciones de su entorno.

Una de las tablas de registro del crecimiento de la planta de frijol, que elaboró un estudiante, es la siguiente:

FECHA	CAMBIOS DE CARACTERÍSTICAS	ALTURA
27 de Octubre	no cambiada mi frijolito sigio igual.	0
29 de Octubre	Se le nota un poco la raíz, y q sale del frijol.	4cm
1 de Noviembre	y a su raíz esta mas notable y se puede observar su crecimiento.	3cm
3 de Noviembre	se nota mucho su tallo y raíces.	5.5 cm
6 de Noviembre	esta igual, su cambio no fue mucho.	5.7 cm
8 de Noviembre	ahora le puedo observar el tallo mas grande y con pequeñas motitas.	6.9 cm
11 de Noviembre	Ahora le puedo observar el tallo mas grande y con pequeñas hojas.	8cm
13 de Noviembre	su altura varia aun mas y sus motitas tambien.	11 cm
16 de Noviembre	Actualmente <del>mucho</del> mucho q esta mas grande.	16 cm

Teniendo presente los datos registrados por cada estudiante, se les pidió que realizaran procesos de medición respecto al cambio del tamaño de la planta. Para ello se les solicitó implementar una estrategia para medir la altura que iba alcanzando a lo largo de los veinte (20) días que duró la actividad. Los estudiantes en la guía describieron el proceso desarrollado para tal fin, pero en su gran mayoría se apoyaron en una regla graduada y midieron desde la base del tallo hasta la parte más alta alcanzada por la planta el día de la toma del registro.



Se les preguntó por el proceso que debía llevarse a cabo para determinar el incremento de tamaño de la planta desde el día 8 de sembrada hasta el día 20. Ellos respondieron lo siguiente:

Registro final - Registro inicial = Variación

Con base en la respuesta dada por este grupo de estudiantes, se observó que lograron comprender el procedimiento matemático para determinar las mediciones del cambio, pero no realizaron dicho cálculo. Otro grupo responde lo siguiente:

se podía determinar como una Razon de cambio variable, porque la vida en general se trata de eso.

Asi Cambio fue de 10.5 cm<sup>7</sup>

Estos estudiantes asocian el cambio con el hecho de que la planta no crece todos los días lo mismo, pues definen que no es constante sino variable, ya que todos los días crece en una magnitud diferente. Al establecer la diferencia de la altura entre el día 8 y el 20, determinan que creció 10.5 cm., realizando el cálculo de acuerdo a los datos recopilados en su tabla, que se muestra en la página 103.

Para determinar de forma más rigurosa los cambio en el crecimiento de la planta, los grupos realizaron tablas como la siguiente, para determinar la razón de cambio entre el tamaño alcanzado y el tiempo transcurrido:

Tiempo (días)	1	3	5	7	9	11	13	15
Tamaño (cm)	0	0	0	3	6	15	21	27
<u>Incremento</u> <u>día</u>	-	0	0	3	3	9	6	6
<u>Tamaño</u> <u>tiempo</u>	0	0	0	0.4	0.6	1.3	1.6	1.8

Cuadro 4.3: Registro tabular tiempo vs crecimiento de la planta.

Se les solicitó que analizaran con detenimiento los registros de cada columna y justificaran si existían diferencias entre ellos. Los estudiantes reconocieron que en la

tabla habían realizado registros relacionados con cambios medibles y no medibles que había sufrido la planta. Percibieron que la altura variaba cada dos días, tiempo en el que se les pidió que efectuaran las mediciones y concluyen que la razón de cambio del frijol es variable en intervalos fijos de tiempo. Reconocen además que la forma de las hojas, el color, las posiciones de la planta, entre otras características, también sufrían modificaciones cada día.

Con la ayuda de este registro tabular los estudiantes determinaron que la variación del tiempo es constante, debido a que la medición siempre se hace cada dos días, que el tamaño tiene una variación no constante, porque según las observaciones y registros no crece lo mismo cada día y que la razón de cambio es “inconstante” puesto que no da el mismo valor en ninguno de los casos; es decir, hay un crecimiento “desproporcionado”.

Estas respuestas indican los diferentes niveles de verbalización y comprensión que van alcanzando los estudiantes y los conceptos de los que se van apropiando a través de las diferentes actividades realizadas, en las que establecen relaciones con el concepto objeto de estudio.



Figura 4.6: Experiencia con el frijol, ¿Cuánto crece?

Los estudiantes recopilaron en su portafolio todas los registros tabulares y demás ampliaciones realizadas sobre el concepto estudiado. Se les solicitó que construyeran un mapa conceptual (Figura 4.7, p. 105), con el fin de sintetizar lo comprendido hasta ese momento del proceso. Esta actividad permitió que los estudiantes revelaran con



claridad la organización cognitiva y la conceptualización que habían alcanzado con respecto a la razón de cambio.

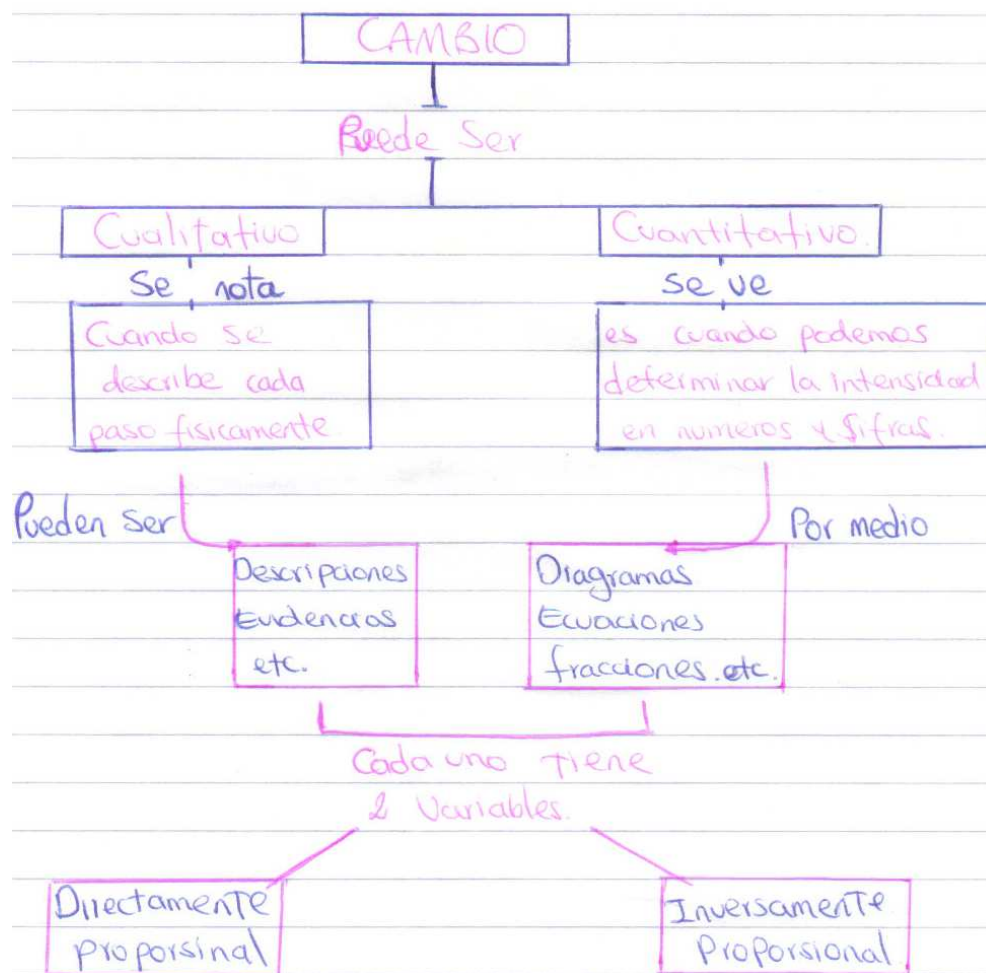


Figura 4.7: Mapa conceptual realizado por los estudiantes en la fase de exploración para presentar conclusiones sobre el tema, mostrando avances significativos en los conceptos y el lenguaje empleado.

Al socializar y analizar los mapas, se reconoció en los estudiantes una estructuración de jerarquías mas elaborada. Ellos involucraron diferentes términos para hacer referencia al cambio y demostraron los avances obtenidos en relación con la construcción de proposiciones y argumentaciones. Los mapas conceptuales fortalecieron la comprensión del concepto de cambio en relación con la distinción entre el cambio cualitativo y el cuantitativo. Los cambios cualitativos los perciben desde las descripciones y evidencias y los cuantitativos desde diagramas, ecuaciones y fracciones,

mostrando un avance en la conceptualización del cambio desde estas dos perspectivas.

Los conceptos mencionados hacen alusión a los registros tabulares, los registros gráficos y a la representación algebraica (modelación de la situación) que son aspectos fundamentales en la formalización de la razón de cambio. Teniendo como referencia lo anterior, puede vincularse la proporcionalidad directa, las constantes de proporcionalidad, la variación de magnitudes, la representación gráfica y algebraica de la línea recta, pues son temáticas que no se desvinculan del concepto objeto de estudio sino que, por el contrario, lo fundamentan y amplían.

#### **4.2.2. Análisis y resultados de las actividades de la fase de investigación guiada**

Estas actividades estaban pensadas para proporcionar a los estudiantes planteamientos más formales sobre el cambio cuantitativo, lo que se refleja en el desempeño de comprensión propuesto para esta fase, que tiene por objetivo que los alumnos apoyados en registros tabulares, gráficos y simbolizaciones determinen la razón de cambio asociada a una situación particular.

En esta fase se involucra significativamente el contexto, idea fundamental de la Enseñanza para la Comprensión, pues este se convierte en la herramienta primordial que permite clarificar la matemática asociada a la realidad. Con base en lo anterior, se proponen situaciones relacionadas con el calentamiento global, con la compra y venta de productos, con variaciones asociadas con el área y la altura de un triángulo y a la velocidad a la que se desplaza un móvil en la que se involucra el tiempo transcurrido en relación con su posición.

##### **Actividad No 1: El cambio climático**

Esta actividad pretendía que los estudiantes, a partir de una situación real, establecieran las variaciones ocurridas en el cambio climático global en un período determinado de tiempo. La información obtenida la debían registrar haciendo uso de tablas en las que se diera cuenta de los aumentos o disminuciones de la temperatura en el tiempo. Se inicia el trabajo con la lectura del cuento ¡Un calor achicharrantel!, Apéndice E, página 179, que buscaba sensibilizar y motivar a los estudiante sobre el tema. Ellos haciendo uso de su competencia interpretativa respondieron la siguiente pregunta:

1. ¿Por qué se produce el incendio y cómo puede describirse el fenómeno que causa el incendio?

Y los estudiantes respondieron:

Este incendio se produce por el cambio climático, que ataca la Tierra actualmente más conocido como calentamiento global el cual es un calor aborrecido que causa sequía y por eso los incendios se producen con tanta facilidad y sin un recurso que permita apagarlo.

Al socializar la lectura y las respuestas dadas se vio la necesidad de estudiar la problemática ambiental actual relacionada con el calentamiento global, por ello se les solicitó buscar información en relación con este fenómeno. Los datos recopilados, los organizaron en tablas y gráficos que permitieron observar los incrementos o disminuciones ocurridos en el tiempo. La importancia de esta actividad radicó en la recopilación de la información obtenida en gráficos y tablas y en la realización de lecturas y extracción de información de las mismas.

Al realizar las exposiciones de la actividad propuesta los estudiantes lograron determinar las variaciones existentes sobre el cambio climático entre los diversos años y compilaron la información en tablas como las siguientes:

**Cualitativa:** Se describen los cambios del medio ambiente desde 1984 hasta el 2006.

Tiempo(años)	Descripción del cambio
De 1984 a 1990	El tamaño del hueco en la capa de ozono sobre la Antártida era aproximadamente de 7 millones de $Km^2$ , hoy es de 29 millones $Km^2$ . 1990 se considera la época más caliente de la últimos mil años.
Entre 1990 y 2001	Demasiada deforestación en Brazil con 22264 $Km^2$ .
Entre 1990 y 2010	La temperatura puede subir entre 1.4 y 6.8 °C
2001	Aumentó 0.6 °C en el siglo XX la temperatura.
2003	Esta década de calor mató más de 30000 personas en Europa y 1500 en India.
2004	Según el documento publicado en Enero del 2004 la cuarta parte de las especies de plantas y animales podían ser exterminados para el 2050.
2005	Es el año más caluroso desde que se mide la temperatura atmosférica.
2006	Se dice que en 6 o 9 años se iniciará una mini era glaciaria.

Cuadro 4.4: Descripciones sobre el calentamiento global.

**Cuantitativa:** Con base en la figura 4.8, que representa una gráfica del calentamiento global, registraron las temperaturas de cada año haciendo lectura del gráfico consultado y determinaron la razón entre las variables tratadas.

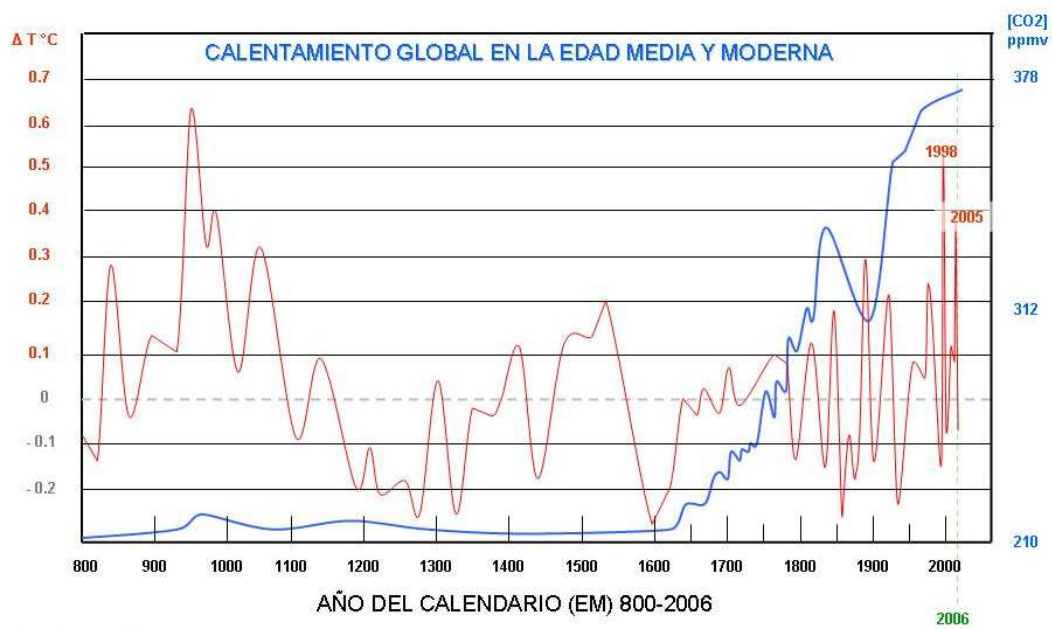


Figura 4.8: Gráfica sobre el calentamiento global desde el año 800 hasta el 2000 d.C.

Tiempo (años)	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
Temperatura (°C)	13.81	13.67	13.67	13.63	13.70	13.69	14.41
$\frac{\text{Temperatura}}{\text{Tiempo}}$	9.86 e-3	9.11 e-3	8.54 e-3	8.04 e-3	7.61 e-3	7.21 e-3	7.21 e-3

Cuadro 4.5: Registro tabular de los alumnos de la gráfica de calentamiento global.

En esta actividad los alumnos continuaron la conceptualización de la razón de cambio a partir de los registros tabulares y de las operaciones aritméticas asociadas a ellos. Concluyeron que por las razones halladas la temperatura a cambiado, entre los diversos años, pero no de forma constante.

Como puede apreciarse en la tabla anterior (cuadro 4.5), los estudiantes determinaron el cociente  $\frac{\text{Temperatura}}{\text{Tiempo}}$ , que indica la cantidad de °C que ha variado la temperatura en desde el año 1400 hasta el 2000 por causa del calentamiento global. El significado de esta razón puede no tener validez, pero se resalta en dicho proceso como por las magnitudes halladas los estudiantes reconocen que no se trata de una razón constante sino variable.

**Actividad No 2: ¿Cuánto cada cuánto?**

Esta actividad parte del siguiente enunciado: Juan Pablo tiene un auto último modelo, cada que llena el tanque de gasolina debe pagar una determinada cantidad de dinero. El está buscando una forma rápida de saber cuánto paga por cierto número de galones de gasolina. ¿Tú puedes ayudar a Juan Pablo a encontrar una respuesta?

Este ejercicio práctico buscó que los estudiantes continuaran la conceptualización del concepto objeto de estudio y observaran como la razón constante esta asociada a una proporción directa.

Los estudiantes debían de completar la tabla que se muestra a continuación.

Galones de gasolina	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio por galón	3350	6700	10050	13400	16750	20100	23450	26800
$\frac{\text{Precio}}{\text{galón}}$	3550	3550	3550	3550	3550	3550	3550	3550

Cuadro 4.6: Cálculo de la razón de cambio.

Las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas relacionadas con el enunciado fueron las siguientes:

1. Al realizar la división entre el precio y el número de galones, ¿Qué significado se le puede asignar a dicho resultado?

Que el precio del galón es de \$3350 y siempre da el mismo por cada precio por número de galones.

2. ¿Cuál es la respuesta que le darías a Juan Pablo?

Que cada galón cuesta \$3350 y por ende que es la cantidad que el quiere saber gasta \$30.150.

3. Si a Juan Pablo le interesara la respuesta como una expresión algebraica, ¿Qué podrías decirle?

$$\begin{array}{l}
 X = 3350 = 3350X = \text{PRECIO DEL GALÓN (Y)} \\
 \downarrow \\
 \# \text{ de Galones.} \\
 \text{LUEGO } Y = 3350X
 \end{array}$$

Se le pidió a los estudiantes que realizaran un registro gráfico de la situación, obteniendo la Figura 4.9 de la página 110.

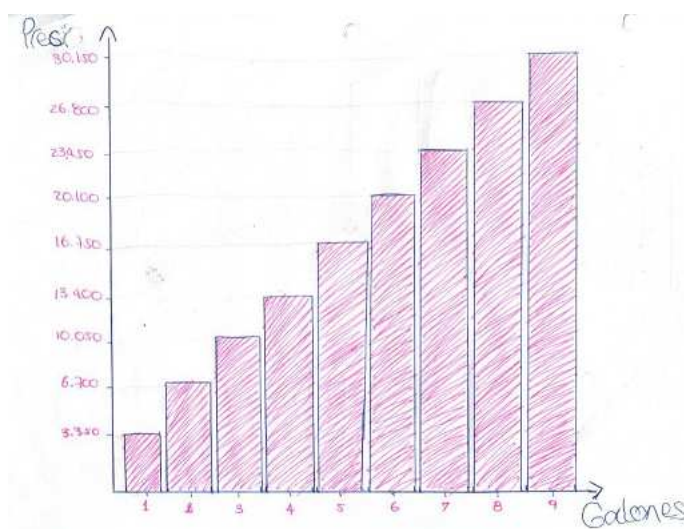


Figura 4.9: Registro gráfico galones vs precio.

De acuerdo a las respuestas que dieron los estudiantes en esta actividad, ellos perciben que la variación entre las magnitudes halladas es constante. Definiendo estos resultados en notación matemática, propia para la variación de magnitudes, lo que se consigue es:

$$\frac{V. \text{ Precio}}{V. \text{ No. galones}} = \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \frac{3500}{1}$$

El anterior procedimiento que es de carácter formal, no hace parte de las elaboraciones de los estudiantes, pero ellos se acercan por medio de las operaciones aritméticas realizadas, los registros tabulares y los gráficos que definieron.

Estas elaboraciones muestran un avance en el nivel de comprensión del cambio cuantitativo. Puede decirse que las producciones escritas son mucho más elaboradas, ya que hacen uso de las variables que intervienen en la situación para modelarla, la escala para el registro tabular es apropiada y se manejan correctamente los ejes, entre otros factores. Se percibe también un avance en relación a la verbalización pues la mayoría de los estudiantes logran explicar como la expresión definida es la forma más sencilla de relacionar las variables. Con estos resultados se logra que el trabajo investigativo propuesto siga encaminado al cumplimiento del objetivo.

### Actividad No 3: El triángulo que cambia

Esta situación involucró el manejo de TIC's para observar las variaciones de un triángulo al modificar la base y altura del mismo. Los estudiantes manipularon la calculadora Voyage 200 o TI 92, interactuando con un triángulo dinámico (se pueden cambiar a voluntad sus dimensiones) creado en CABRI.

Base (AC) = 6

Altura= 4

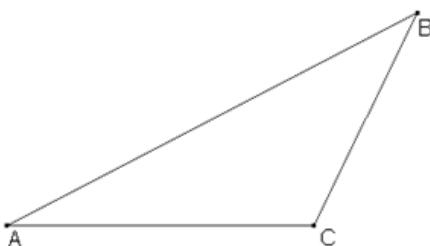


Figura 4.10: Actividad sobre las variaciones de la altura y la base de un triángulo.

La actividad propuesta fue la siguiente: dado el triángulo  $ABC$ , variar el valor del segmento  $AC$ , dejar la altura constante y calcular el área. Realizar una tabla con 10 registros.

Al triángulo interactivo era posible modificarle el valor del segmento  $AC$  (base) y al mismo tiempo desplazar el vértice  $B$ , logrando que el triángulo se ampliara o disminuyera, cambiando su forma y su área.

Después de que los estudiantes se familiarizaron con la calculadora, interactuaron y manipularon con el triángulo diseñado, iniciaron la construcción de un registro tabular para consignar el cálculo del área al cambiar la base. Esta situación hace referencia a



magnitudes variables como la magnitud de la base y a constantes como la altura de la figura estudiada. A continuación se describen los registros y respuestas dados por los estudiantes.

*Altura : 3cm*

AC	5	8	9	28.2	41	53	64.5	70	83
ÁREA	7.5	12	13.5	42.3	61.5	79.5	96.75	105	124.5

Cuadro 4.7: Cálculo del área del triángulo variando la base.

Se les pidió realizar la representación gráfica de la tabla anterior. El resultado mostrado por uno de los grupos de trabajo fue el siguiente:

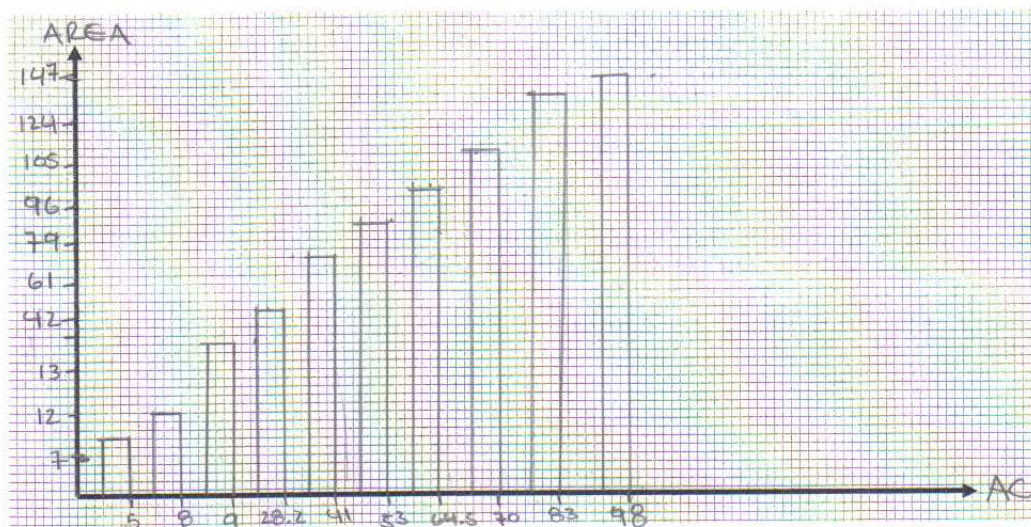


Figura 4.11: Registro gráfico de la variación del área de un triángulo, teniendo la altura fija y variando un cateto.

Los estudiantes concluyeron respecto a la gráfica trazada:

3. ¿Qué puedes decir respecto a la gráfica trazada? ENTRE EL VALOR DE AC  
SEA MAYOR POR ENDE EL AREA TAMBIEN.  
SIEMPRE IRA SUBIENDO EN LINEA DIAGONAL

Luego realizaron una tabla con los valores hallados, donde relacionaban el valor del área, la base y el cociente entre los dos, preguntándoles que podrían precisar sobre la



última magnitud hallada. La tabla y las respuestas elaboradas por los estudiantes se muestra a continuación.

AC	5	8	9	28.2	41	53	64.5	70	83
Área	7.5	12	13.5	42.3	61.5	79.5	96.75	105	124.5
$\frac{\text{Área}}{\text{AC}}$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

Cuadro 4.8: Cálculo de la razón de cambio entre el área y la base del triángulo.

¿Qué puedes decir del valor hallado? AL DIVIDIR EL ÁREA AC CON EL ÁREA NOS DA 1.5 QUE HACE REFERENCIA A LA MITAD DE LA ALTURA.

Los estudiantes en esta actividad reconocieron la dependencia de una variable con respecto a otra. Determinaron una razón constante, porque pese a la variación del área y la base del triángulo, su cociente es igual a un medio de la altura ( $\frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{\text{altura}}{2}$ ).

A continuación se les propuso que con el mismo triángulo  $ABC$ , dejando constante el valor del segmento  $AC$  y realizando variaciones a la altura, se calculara el área y que registrara los datos. En la siguiente tabla se muestran los registros.

$AC = 5\text{cm}$

ALTURA	1.1	2	2.3	3.3	4	4.1	6.1	9	12
ÁREA	2.75	5	5.75	8.25	10	10.25	15.25	22.5	30

Cuadro 4.9: Cálculo del área del triángulo variando la altura y fijando un cateto.

La representación gráfica de la tabla anterior se muestra en la Figura 4.12 de la página 114.

Se propuso a los estudiantes responder las siguientes preguntas con base en la experiencia, para determinar el nivel de conceptualización alcanzado.

1. ¿Qué pasaría con el área del triángulo si desplazamos el punto  $B$  en forma paralela al cateto  $AC$ , pero la altura y el segmento  $AC$  son constantes?

*El área no cambiaría, sería igual, porque solo cambia la forma del triángulo, pero no la superficie contenida, que se denomina área.*

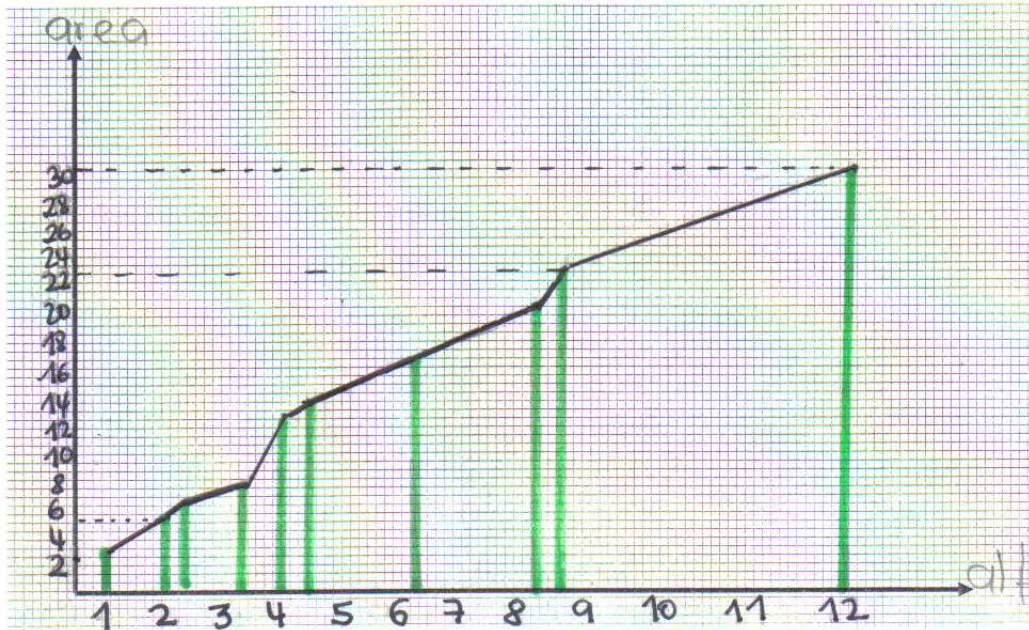


Figura 4.12: Registro gráfico de la variación del área.

2. ¿Qué pasaría con el área del triángulo si desplazamos el punto  $B$  de tal forma que varíe la altura y el segmento  $AC$ ?

*Todo sería diferente, cambia altura y la base, dejando de ser constantes. Cambia de forma el triángulo y de ésta forma también el área.*

Con la segunda parte de esta misma actividad, los estudiante comprendieron lo relacionado con magnitudes variables y constantes, acercándose al tratamiento de la razón de cambio.

La siguiente actividad contextualiza el reconocimiento que logran los estudiantes sobre magnitudes variables y constantes y el tratamiento de razones de este tipo, pues vincula el concepto de velocidad como una razón de cambio.

#### Actividad No 4: Mucha distancia, mucho tiempo o mucha velocidad

Nuevamente se hace uso de la calculadora para esta actividad. Con la ayuda de una imagen dinámica elaborada en CABRI, que simula un carro en movimiento, se pretende conceptualizar un fenómeno físico como la velocidad: la razón de cambio asociada a la distancia y al tiempo.

Antes de iniciar la toma de datos los estudiantes debían realizar un bosquejo de la gráfica que representaría el tiempo vs la distancia del carro. Dos grupos de trabajo realizaron las siguientes gráficas.

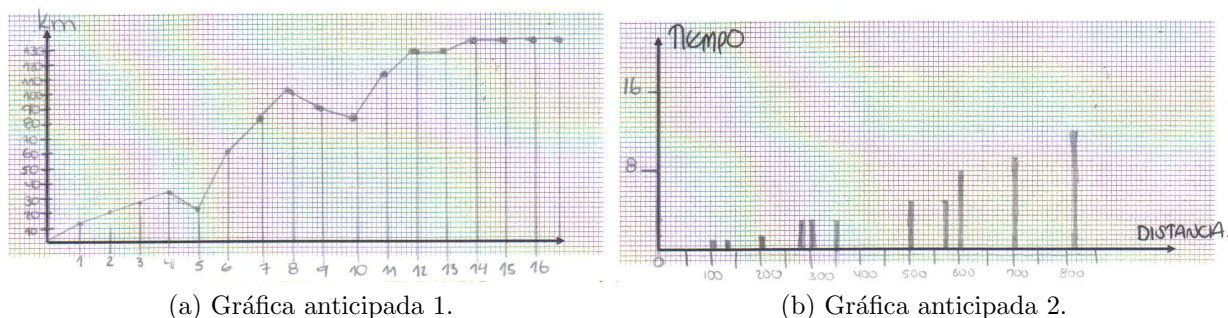


Figura 4.13: Gráfica distancia vs tiempo.

Posteriormente debían manipular la calculadora, animando la imagen del carro para permitir que la calculadora capturar los datos automáticamente y los mostrara en una gráfica de distancia vs tiempo. Según los datos capturados, los estudiantes debían de dibujar sobre otro plano la gráfica que aparece en la calculadora. Las gráficas realizadas por algunos de los grupos fueron las siguientes:

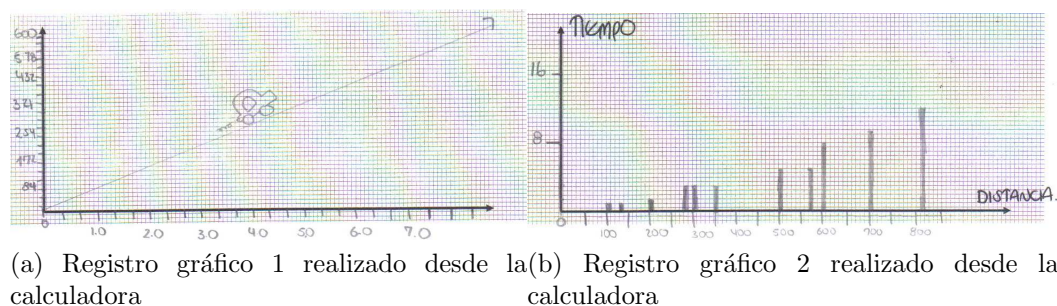


Figura 4.14: Gráfica distancia vs tiempo.

Al contrastar la gráfica que ellos habían elaborado antes de la situación y la que arrojaba la calculadora debían determinar las similitudes y/o diferencias existentes. Los estudiantes respondieron que habían manejado mal los ejes, pues donde iban los Km, es decir la distancia habían puesto las horas (tiempo) y viceversa. Notaron cambios en relación con la frecuencia, escala y secuencia de los datos. Esto le sugirió a los estudiantes cómo asociar variables dependientes e independientes con los ejes.

También debían de trasladar los datos de la gráfica realizada por la calculadora a una tabla. En algunos casos fue necesario realizar aproximaciones de los datos de la

distancia y del tiempo. Uno de los registros obtenidos fue el siguiente:

Tiempo (s)	Distancia (m)	Variación tiempo	Variación distancia	$\frac{V. \text{ distancia}}{V. \text{ tiempo}}$
1.0	80	-	-	-
1.5	120	0.5	40	80
2.0	160	0.5	40	80
2.5	200	0.5	40	80
3.0	240	0.5	40	80
3.5	280	0.5	40	80
4.0	320	0.5	40	80
4.5	360	0.5	40	80
5.0	400	0.5	40	80

Cuadro 4.10: Tabla de datos distancia vs tiempo.

Lo interesante de esta actividad radicó en que los estudiantes asociaron la razón de cambio entre la distancia y el tiempo como la velocidad. La reflexión de ello se indujo con las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ha observado en los valores de la distancia y en la variación de la misma?

QUE LA VARIACION DE LA DISTANCIA NO CAMBIA POR LO TANTO ES CONSTANTE

2. ¿Qué representa el resultado de la  $\frac{V. \text{ distancia}}{V. \text{ tiempo}}$  ?

La razón de cambio en km/h, es decir la variación de la distancia en el tiempo

3. ¿Cómo muestran los resultados que el coche tenía la velocidad? Justifique la respuesta.

muestra que el coche tenía una velocidad continua y constante.

Puede apreciarse que a partir del ejercicio, los estudiantes lograron darle un significado a la razón de cambio y conceptualizar sobre magnitudes dependientes e independientes, constantes y variables.





Figura 4.15: Actividad con la calculadora.

### 4.2.3. Análisis y resultados de la fase del proyecto final de síntesis y actividades complementarias

En la fase final, como es descrito en el Capítulo 3, sección 3.2.4 en la página 64, los estudiantes deben mostrar el nivel de comprensión alcanzado. Por tal razón, realizaron una exposición con relación a una situación del contexto. Esta situación se seleccionó de acuerdo con sus motivaciones e intereses. A continuación se describen dos de los proyectos realizados.

Uno de los grupos realizó su trabajo referido a la evolución humana y como en relación al tiempo el hombre va alcanzando mayor altura. Este grupo definen la situación contextual seleccionada de la siguiente forma: “Al hablar del ser humano encontramos dos variables relacionadas como lo son: El tiempo (millones de años) y la altura que fue alcanzando el hombre al transcurrir la evolución de la especie. El cambio de altura se percibe desde el australopithecus, pasando por el homo-habilis, homo-erectus, homo-sapiens neandertalensis, el homo-sapiens sapiens hasta el hombre moderno”.

A continuación se presenta la gráfica consultada y el registro tabular construido para determinar la razón de cambio de la estatura de las especies a lo largo del tiempo.

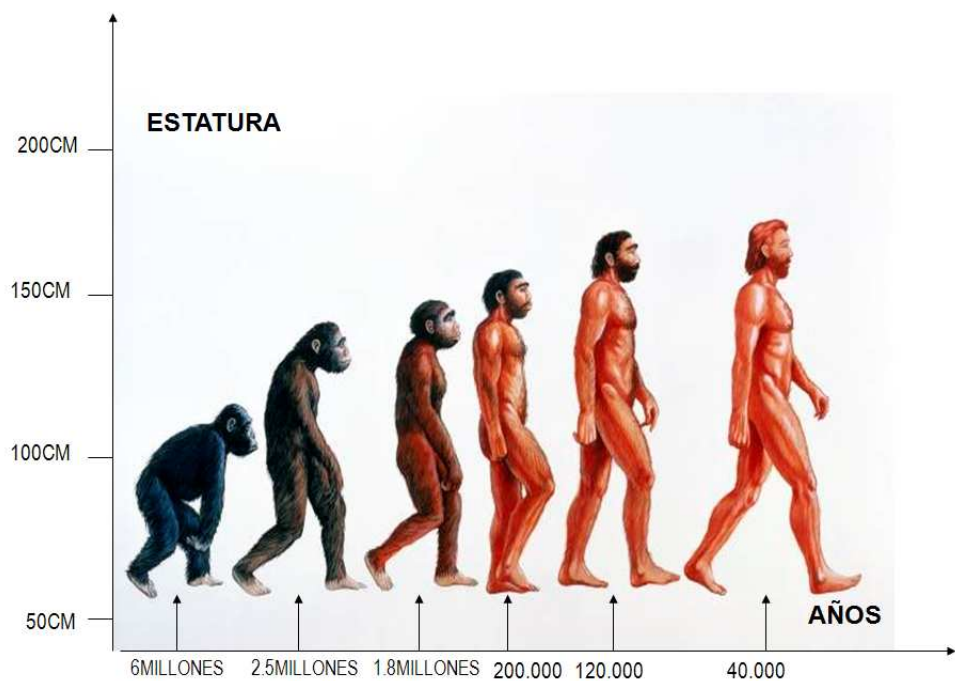


Figura 4.16: Gráfica de la altura en la evolución del hombre.

Hombre	Austra	Habilis	Erectus	Sapiens	Sapiens-Sapiens	Moderno
Tiempo (mill. años)	6	2.5	1.8	200 mil	120 mil	40 mil
Altura (cm)	120	130	150	165	175	180
V. tiempo	-	3.5	0.7	198.2	80	80
V. altura	-	10	20	15	10	5
$\frac{V. altura}{V. tiempo}$	-	2.8	28	0.07	0.125	0.0625

Cuadro 4.11: Registro tabular altura de evolución vs año.

Con base en la información recopilada por estos instrumentos, tratan de generalizar la expresión que determina la razón de cambio de la situación abordada y proponen la siguiente relación algebraica:

Si  $x = tiempo$  en millones de años,  $y = estatura alcanzada$  y  $E = especie$ , el cociente entre estas dos magnitudes, es decir **altura sobre tiempo** es igual a **especie**, escrito matemáticamente  $E = \frac{y}{x}$ , lo que puede considerarse la razón de cambio entre estas variables.

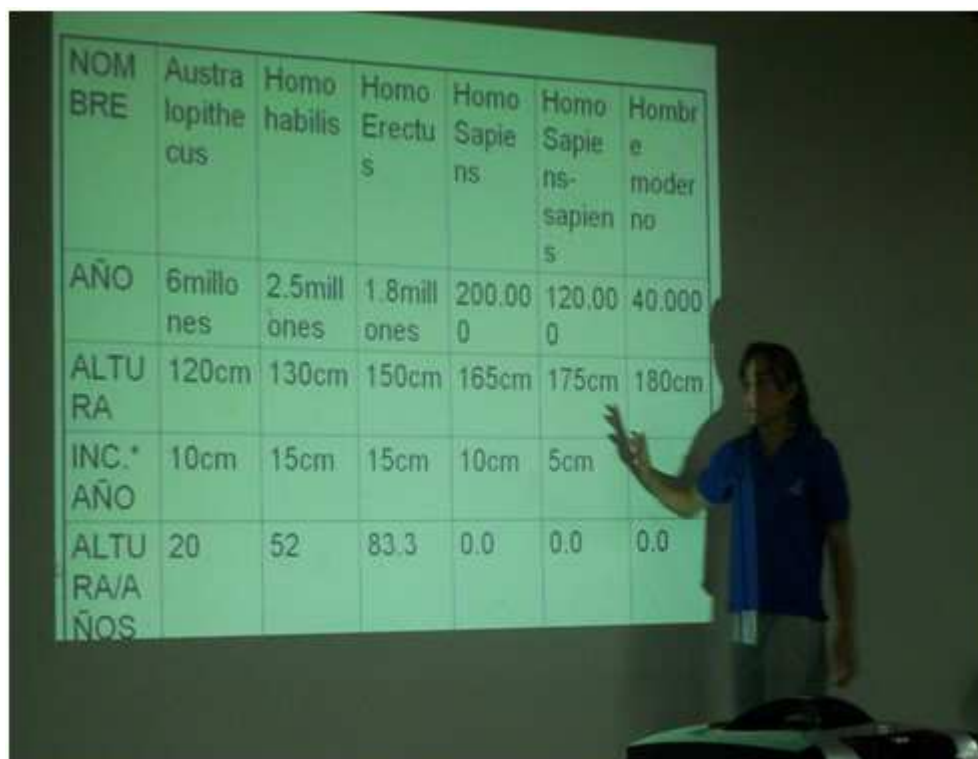
En la modelación realizada por los estudiantes se logra percibir una acercamiento a la conceptualización de la razón de cambio, aunque falta rigor, pues lo que ellos

pretendían determinar era que el cociente que se da entre la variación de la altura y la variación del tiempo. Determinarían así, una razón de cambio entre estas magnitudes para cada especie. Matemáticamente lo que pretendían conseguir era:

$$\text{Variación de la altura de cada especie} = \frac{\text{V. altura}}{\text{V. del tiempo}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}$$

Los estudiantes que elaboraron este proyecto concluyeron, que al comparar la variable altura con el tiempo, la primera es dependiente de la segunda y que al aumentar la altura de las especies, transcurría más tiempo. Lo asociaron con magnitudes directamente proporcionales pero se precisa que no cumplen con esta característica porque no se define entre ellas una razón constante.

Logran conceptualizar con relación al cambio o variación de una variable, que siempre hay dependencia de una variable con respecto a otra, y que la razón de cambio se define como la división entre la variación de dos magnitudes. Este mismo grupo concluye, de acuerdo a su proyecto final, que la razón de cambio es **variable** pues en ninguno de los resultados obtenidos se consigue el mismo valor.



NOM BRE	Australopithecus	Homo habilis	Homo Erectus	Homo Sapiens	Homo Sapiens-sapiens	Hombre moderno
AÑO	6 millones	2.5 millones	1.8 millones	200.000	120.000	40.000
ALTURA	120cm	130cm	150cm	165cm	175cm	180cm
INC.* AÑO	10cm	15cm	15cm	10cm	5cm	
ALTURA/AÑOS	20	52	83.3	0.0	0.0	0.0

Figura 4.17: Exposición del proyecto final de la altura en la evolución del hombre.

Otro de los proyectos consistió en hallar la razón de cambio para el tamaño y peso que alcanzan los fetos en el proceso de gestación. Para ello, realizaron una tabla de las variaciones de estas magnitudes durante el embarazo.

#### Tabla con relación al crecimiento del feto durante el embarazo

Meses de gestación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tamaño (cm)	0.5	2.5	7.5	16 - 21	25	33	40	45	50
Incremento del tamaño	-	2	5	8.5	9	8	7	5	5
$\frac{\text{Tamaño}}{\text{mes}}$	0.5	1.25	2.5	4	5	5.5	5.7	5.6	5.5

Cuadro 4.12: Registro tabular del crecimiento de un bebé en gestación.

Y con estos datos construyeron las siguientes gráficas:

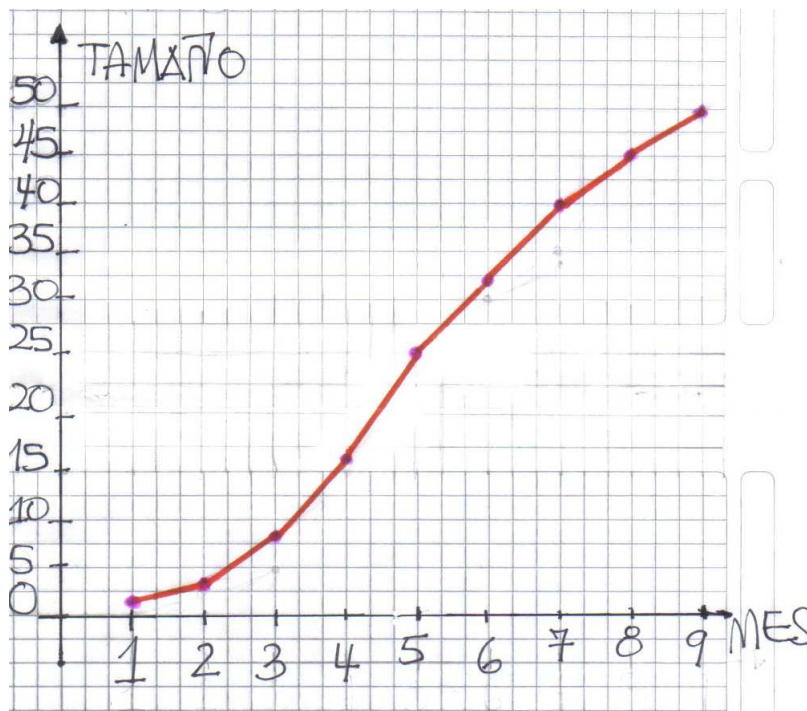


Figura 4.18: Registro gráfico del tamaño que alcanza un bebé en gestación.



## Tabla con relación al peso del feto durante el embarazo

Meses de gestación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Peso (g)	0	0	0	250	500	1000	1300	2500	3500
Incremento por mes	-	0	250	250	500	300	1200	1000	-
$\frac{V. \text{ distancia}}{V. \text{ tiempo}}$	0	0	0	62.5	100	166.6	185.4	312.5	388.8

Cuadro 4.13: Registro tabular del peso de un bebé en gestación.

Con los datos registrados en la tabla, elaboraron el registro gráfico que se muestra a continuación:

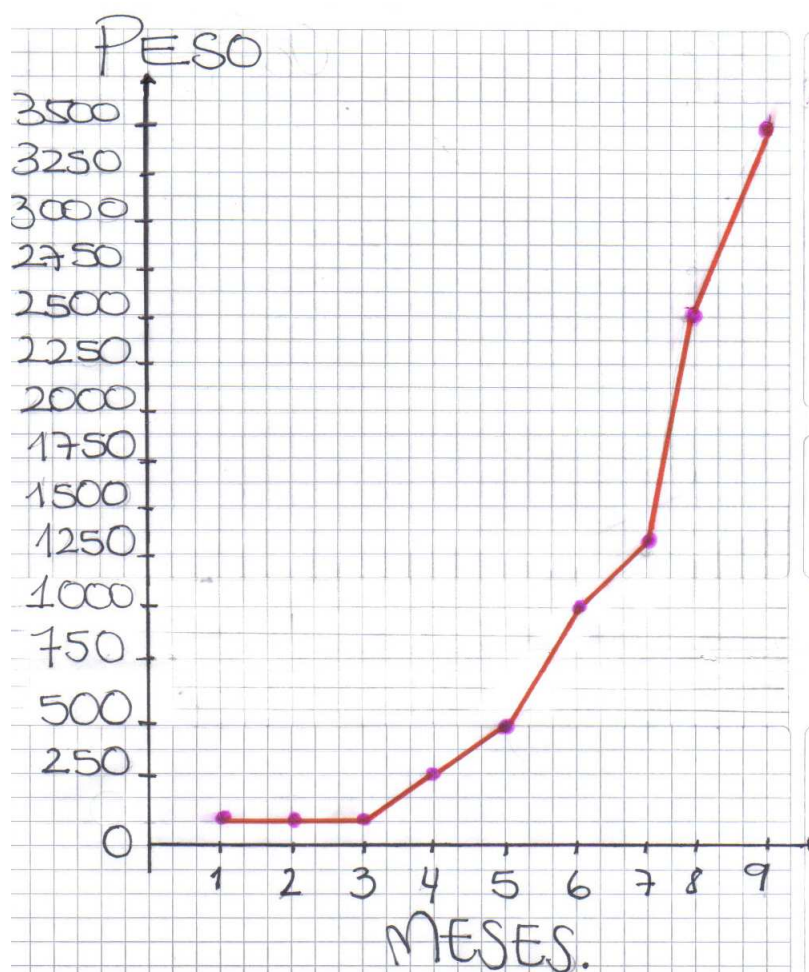


Figura 4.19: Registro gráfico del peso que alcanza un bebé en gestación.

La maqueta elaborada, fue la siguiente, en donde mostraban el proceso de gestación y las variaciones asociadas al peso y talla del cigoto, morula, embrión y feto.



Figura 4.20: Maqueta elaborada sobre el cambio en el peso y el crecimiento de un bebé gestante.

De este trabajo logran concluir que la razón de cambio entre la variación del peso y el mes de gestación y variación de la talla con esta misma variable, no es constante, ya que no permanece igual en cada uno de los nueve meses, lo que se refleja en las gráficas que no representan una línea recta creciente, sino algo como curvo.

Es importante tener presente que los estudiantes del grado noveno seleccionados para la investigación se dividieron en 12 grupos, de los cuales 9 de ellos realizaron el proyecto final. Los temas seleccionados por los grupos fueron: el deshielo glacial y el cambio asociado a los niveles de agua, el incremento de la proyección de la sombra de un poste de luz al caer la tarde, el crecimiento de un animal al transcurrir varios días de nacido, el incremento del capital en una empresa, el cambio de altura de un edificio en construcción, la tasa de vacunación de una vereda del municipio de Caldas, el incremento poblacional dado en Colombia después de los últimos tres censos, la variación altura en la evolución del hombre y las modificaciones del peso y tamaño de un bebé gestante. Estos dos últimos fueron descritos anteriormente.

Esta fase del proyecto se fortaleció con la elaboración de mapas conceptuales. Esta herramienta se empleó para evaluar los procesos, permitiendo a los estudiantes sintetizar las relaciones del concepto objeto de estudio. Al docente, le permitió observar diferencias de conceptualizaciones con respecto a los trabajos de síntesis realizados por los estudiantes que finalizaron el proceso.

De acuerdo a uno de los mapas realizados por los estudiantes para sintetizar y dar cuenta de lo aprendido (Figura 4.21, página 123), se apreció que manifiestan

la importancia del contexto para dar significación a la razón de cambio. Además, reconocieron los tipos de cambios que pueden darse (*constante y variable*) y las características que los definen. Incluyen como herramienta para definir lo cualitativo las descripciones y evidencias físicas que de alguna forma contribuyen a la verbalización, mientras que para lo cuantitativo, incluyen los registros gráficos, algebraicos y procedimentales, como son las ecuaciones y las mismas razones de cambio.

En esta actividad los conceptos que los estudiantes involucraban en sus construcciones, tenían un significado específico de acuerdo con el contexto en los que desarrollaron los trabajos. Ellos involucraban en el mapa formalizaciones de los procedimientos algorítmicos o procesos que les permitan llegar a respuestas correctas a partir de los conceptos y proposiciones que explican el fenómeno o la situación estudiada.

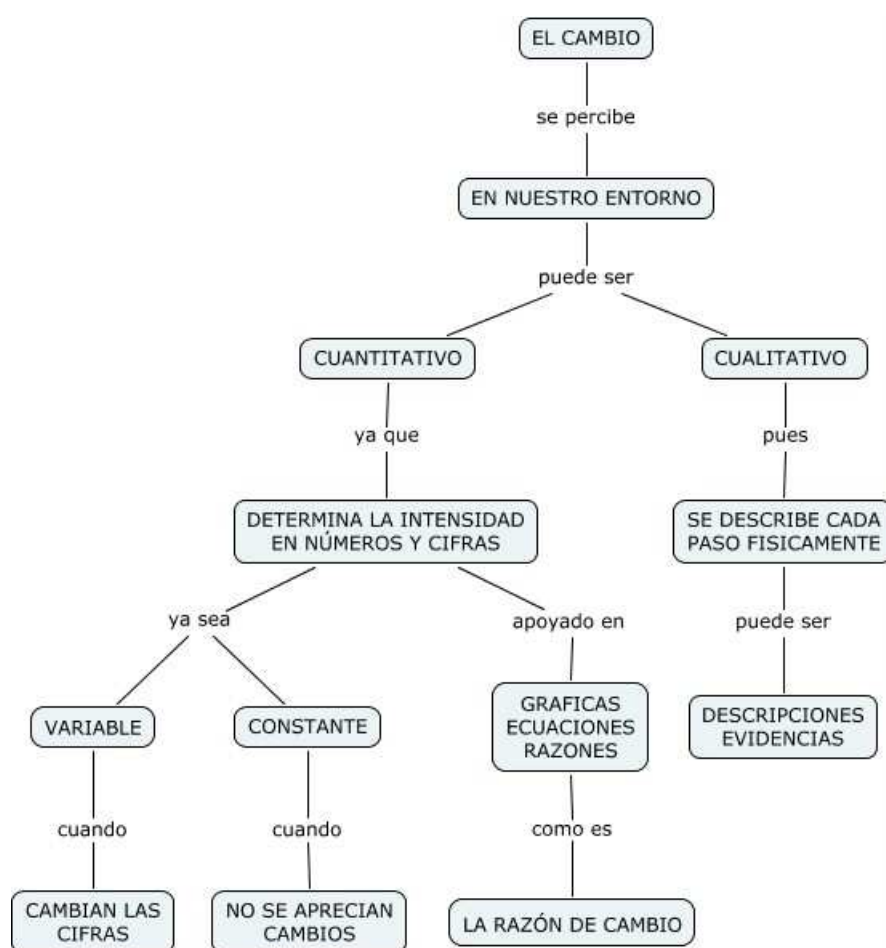


Figura 4.21: Mapa conceptual como herramienta evaluativa, presentado por un grupo de estudiantes.

Desde esta experiencia, los mapas conceptuales se convierten en una herramienta importante para el docente de matemáticas, porque en primer lugar le permiten reflexionar sobre su práctica pedagógica y de esta forma construir experiencias significativas para sus estudiantes; en segundo lugar, le ayudan a identificar cuando un estudiante ha construido correcta o incorrectamente las relaciones involucradas en el proceso de aprendizaje y como debe intervenir para ayudarle a progresar en su proceso de formación para que así, el pueda construir las bases de un edificio matemático sólido.

Para finalizar el proceso, la guía propone una última actividad, que se expone en la siguiente sección y, que pretende sintetizar el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes.

### Actividad No 1: ¿Qué varía?

El propósito de esta última actividad era que los estudiantes profundizaran en la forma de determinar la razón de cambio. Se les propuso dos situaciones contextuales con las cuales debían realizar un registro tabular, gráfico y algebraico y determinar la razón de cambio desde los datos definidos, reconociendo la variación de magnitudes.

El primero de los enunciados fue: Se estima que dentro un año un pueblo con 5 millones de habitantes tendrá un cambio de 500 personas en la población. ¿Cuál sería el cambio para 12 meses?

La tabla diligenciada por un grupo de estudiantes fue la siguiente:

Años	2007	2008	2009	2010
Habitantes	5000000	5000500	5001000	5001500
$\frac{V.Habitantes}{V.año}$	-	500	500	500

Cuadro 4.14: Razón de cambio de la población.

Se les preguntó ¿Cuál es la variable dependiente y la independiente? ¿Por qué? y la respuesta de algunos grupos coincidía con la siguiente:

Dependiente: Población; ya que a medida que pasan los años esta crece.  
Independiente: Años; son una variable que transcurre (o medido) cuando transcurre el tiempo.

Al preguntarles por la expresión algebraica que generaliza la situación, ellos explicaron de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{total habitantes} &= 500 \times \text{año} + \text{aumento} \\ y &= 500x + 500000 \text{ si } y = \text{total habitantes y } x = \text{años} \end{aligned}$$

Cuando se preguntó sobre la razón de cambio, respondieron:

Que es constante y que el cambio es constante

Algunos estudiantes asumieron que la razón de cambio es inconstante, pues tenían en cuenta la variación de los habitantes respecto al año.

El segundo enunciado fue: Un trabajador ensambla 3 piezas cada media hora. ¿A qué razón ensambla una pieza el trabajador? ¿Por qué? Los estudiantes definen que el trabajador ensambla 6 piezas cada hora. La respuesta la obtienen a partir del planteamiento de una regla de tres simple directa.

Llenaron la tabla según el enunciado planteado, consiguiendo la forma siguiente:

No. de piezas	3	6	9	12	15	18	21
Tiempo (min)	30	60	90	120	150	180	210
$\frac{\text{V. Tiempo}}{\text{V. No. piezas}}$	10	10	10	10	10	10	10

Cuadro 4.15: Razón de ensamble de una pieza por trabajador.

La respuesta a la pregunta, ¿Cuál es la expresión algebraica que generaliza la situación? fue:

$$\begin{aligned} \text{TIEMPO UTILIZADO PRODUCCION} &= 10 * \text{NUMERO PIEZAS} \\ y &= 10x \end{aligned}$$

Respecto a la razón de cambio, afirman:

Se puede decir que es constante siempre el cambio es igual no disminuye mas ni aumenta mas.

Al trazar la gráfica para esta situación, concluyen que es una línea recta y que tiene una relación con la regla de tres directa, pues existe una constante de proporcionalidad que permite un aumento siempre igual en la recta.



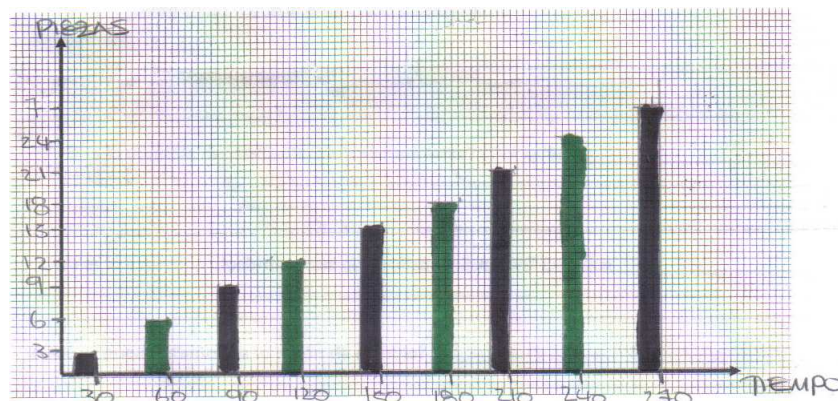


Figura 4.22: Registro gráfico tiempo utilizado para ensamble de piezas.

Al interrogarles sobre la posibilidad de determinar cuánto era la variación de la situación desde el dato 3 hasta el 8, pero haciendo la lectura desde la gráfica, logran hacerlo y determinan que la variación del tiempo es de 150 minutos y de la producción es de 15 piezas

Es importante resaltar que la disposición de los estudiantes frente a este trabajo fue diferente, pues cumplían con todas las actividades demostrando un alto nivel de interés y motivación. En cuanto al proceso de conceptualización de la razón de cambio, se evidencian cambios radicales, pues pasan de una comprensión empírica a una comprensión más rigurosa, que incluye relaciones matemáticas. Estos aspectos serán analizados con mayor profundidad en el Capítulo 5.

### 4.3. Resultados del post-test

En la última clase del curso, a todos los alumnos se les aplicó un pos-test, (Apéndice C, página 173), con la finalidad expresada en el Capítulo 3, sección 3.3.2 en la página 72 y buscando conocer lo que pensaban acerca de la experiencia de enseñanza y de aprendizaje en la que habían participado durante el período y la conceptualización alcanzada en términos del concepto objeto de estudio.

Con esta herramienta metodológica no se pretendía medir los niveles de comprensión alcanzados por cada uno de los estudiantes referente a la temática de la razón de cambio, sino, la manera de percibirla con referencia al contexto. Las respuestas dadas se contrastan con algunas del pretest, para extraer conclusiones del trabajo. Estos contrastes se expondrán en el siguiente capítulo.

A continuación se transcriben cinco (5) de las respuestas dadas por los alumnos,

para tener una mejor apreciación de la evolución del lenguaje y relación con el contexto. Se transcribieron las respuestas dadas por los mismos alumnos de los que se transcribió el pretest. Para tener una mejor apreciación de cada un alumno en particular, las respuestas 1.a), 2.a), 3.a), etc. corresponden al mismo alumno, y así sucesivamente para cada caso.

1. ¿Con el desarrollo de las actividades propuestas, has obtenido nuevas comprensiones acerca del cambio en el mundo real? Explique.
  - a) *Si, esta forma de trabajo es la más creativa que conozco, me mostró las variaciones de conflictos mundiales de una forma matemáticas muy razonables.*
  - b) *Si, porque de acuerdo a esto me he dado cuenta en el problema que vive o vivimos el mundo con el calentamiento global.*
  - c) *Si, he tenido varias comprensiones que no tenía antes de empezar el periodo, como fue que muchos acontecimientos de la vida diaria pueden ser cuantitativos y cualitativos, esto nos ayuda a ver y determinar una razón de cambio.*
  - d) *Si, con las actividades que desarrollamos este período y de la manera en que las desarrollamos creo que comprendí mejor los cambios del mundo.*
  - e) *Si, yo no tenía muy claro toda la demora que tenía un pato para salir del todo del huevo, tampoco estaba segura que la población en Colombia aumentaba y ahora lo estoy. También me di cuenta que hay varias clases de cambio.*

Con las respuestas dadas por los estudiantes, se puede apreciar que lograron contextualizar la razón de cambio y a su vez comprendieron este concepto creando relaciones con el cambio cualitativo y cuantitativo, lo que indica el cumplimiento de los objetivos propuestos con esta investigación.

2. Al trabajar todas las situaciones de cambio propuestas, ¿Qué nuevas experiencias de aprendizaje lograste? Justifique.
  - a) *Pude darme cuenta que para hacer un trabajo bien hecho, tenemos muchos recursos: diagramas, mapas conceptuales, diapositivas, acetatos y el buen manejo del habla.*
  - b) *Logre comprender las diversas formas en las cuales se ven los cambios, por ejemplo en un terremoto, en el crecimiento de un animal, con las mezclas de las pinturas, el crecimiento de una planta, etc.*
  - c) *Aprendí a observar cambios que se dan en todas las situaciones de la vida diaria como la variación relacionada con el crecimiento de una planta, o en*

*algo que nos afecta como el calentamiento global y muchas otras situaciones reales.*

- d) Pienso que logre identificar mejor los cambios que se desarrollan a mi alrededor y a diferenciar si lo hacen de manera cualitativa o cuantitativa.*
- e) Pienso que fue lo que conteste anteriormente, ya que no sabía que en el crecimiento de un pato se pueden percibir y medir los cambios. También me di cuenta de que todas las cosas cambian en la vida cotidiana y en el mundo en que vivimos.*

Los estudiantes dejan ver con sus respuestas que la experiencia produjo cambios en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Incluyeron los mapas conceptuales y otros recursos como herramientas para validar sus aprendizajes. Lograron el reconocimiento del cambio en situaciones contextuales que permitió el estudio de las matemáticas en torno a la realidad actual.

- 3. En la selección y desarrollo del proyecto final de síntesis, ¿Qué elementos de la vida cotidiana y conceptos de otras asignaturas influyeron en la elaboración y ejecución?
  - a) Influyo todo, por que todo necesita un proceso y un tiempo y cada vez las situación será diferente.*
  - b) La sombra, debido a que en la vida cotidiana por medio de la luz eléctrica o solar se produce, ya sea la de uno mismo o algún animal, objeto o cosa y cambia de acuerdo a la posición que tengamos.*
  - c) El proceso de gestación, porque pudimos incluir conceptos de varias asignatura como ciencias naturales al consultar el nombre de cada etapa de crecimiento, artística para la realización de la maqueta, además las matemáticas obviamente y la tecnología porque sin las ecografías no se puede observar ni el peso ni el tamaño de los fetos.*
  - d) La problemática del calentamiento global, pues esta relacionado con todos y es actual, lo que más interés nos despertó.*
  - e) La demografía que vendría ha ser geografía, sociales y un elemento de la vida cotidiana sería la inmigración y la natalidad.*

Esta experiencia permite a los estudiantes vincular el estudio de las matemáticas con otras ciencias, lo que en vez de crear complicaciones para la comprensión de esta ciencia y más aún de la temática de estudio, logra establecer relaciones que le permiten dar mayor significación al tema abordado.

- 4. ¿Qué cambios o modificaciones pueden ser medidos en nuestra vida? Explique.



- a) *Considero que todos los cambios que ocurren porque todos lleva un proceso, un tiempo y cada instante es diferente al anterior.*
- b) *Aunque unos cambio suelen percibirse más que otros, todos los cambios que ocurren pueden ser medidos con un determinado proceso y el cual depende la situación inicial y las variaciones ocurridas para cuando se termina. Este proceso puede ser medible o cuantificable, solo que necesita un proceso.*
- c) *Todos, ya que tenemos puntos de partida que nos ayudan a medir los cambios, ejemplo: una construcción, el crecimiento de una planta, los nacimientos y defunciones, un proceso de gestación, la evolución del homo-sapiens, etc.*
- d) *Todos aquellos que percibimos, pues se pueden tener en cuenta las modificaciones ocurridas.*
- e) *Muchos cambios ya que los podríamos clasificar en cualitativos y cuantitativos. Ejemplo: el cambio de estar desorganizada en la mañana y organizarme a medio día, la velocidad de los automóviles, la caída del dólar, etc.*

Como se percibe en las respuestas, los estudiantes lograron determinar que los *cambios cuantitativos*, pueden ser medidos en términos de magnitudes y los *cambios cualitativos* desde las descripciones. Tienen presente que el cuantificar implica un procedimiento matemático y lo verbalizan.

5. *¿Qué nuevas situaciones lograste comprender y utilizar para determinar si ha ocurrido un cambio o modificación y el valor de este? Explique.*
- a) *Comprendí que con un gráfico puedo explicar las variaciones ocurridas. Para mi exposición final esto fue muy importante porque, de esta manera determinamos el valor del cambio ocurrido en nuestra situación.*
  - b) *Logré reconocer que si se encuentra un antes y un después se puede determinar cuanto ha cambiado algo.*
  - c) *La situación de como al evolucionar el homo sapiens la altura varió. Para ver el cambio de esta situación podemos usar las gráficas, las tablas de variaciones y otros registros de donde podamos extraer información.*
  - d) *Logre comprender y utilizar las matemáticas (razón de cambio) para determinar que tan grande son los cambios.*
  - e) *Ya lo había enunciado en respuestas anteriores, pero logre comprender que todo genera un cambio, de diversa forma pero lo genera.*

Según las respuestas de este numeral, los registros tabulares, gráficos, geométricos y algebraicos son herramientas que facilitan la medición de la variación. Además mencionan como la medición entre lo inicial y final determina la variación del cambio. Esto, en términos formales, es asociado con la expresión  $\Delta(x)$ .

6. ¿Se necesita del cambio para explicar algunos fenómenos de la vida diaria? ¿Por qué? Cite algunos ejemplos.
- a) *Si, porque no todo en la vida es igual. De joven a viejo, de rico a pobre y viceversa.*
  - b) *Si, porque en un terremoto al medir los cambios en la intensidad nos podemos dar cuenta a que nivel esta en la escala de Rither y así alertar a las personas y evitar una tragedia.*
  - c) *Si, porque si no hay cambios, los fenómenos de la vida diaria no se podrían explicar, no se podría determinar cuanto aumenta o disminuye una situación y/o cuanto permanecería estable, ejemplo: el calentamiento global, los terremotos, el fenómeno del niño, las inundaciones, etc.*
  - d) *Claro que se necesita, ya que percibiendo este nos damos cuenta de la evolución de nuestro entorno.*

Estas afirmaciones dan cuenta del nivel de importancia que dan a la medición del cambio, es decir, a la razón de cambio, lo que implica haber alcanzado una conceptualización del concepto objeto de estudio.

7. ¿Qué experiencia te deja el hecho de haber estudiado una situación aplicando los conceptos de matemática estudiados?
- a) *Me sorprende, porque hasta el final, no sabia o más bien, no veía, donde estaban las matemáticas.*
  - b) *Me gusto mucho el haber podido aprender y comprender nuevos conocimientos acerca de lo que es un cambio.*
  - c) *La experiencia que me dejo el trabajo de matemáticas fue muy buena ya que me di cuenta que en una situación de la vida puede estudiar y analizar, si te propones y dedicas, los conceptos matemáticos que no son tan complicados.*
  - d) *Creo que después de esta experiencia tan interesante ha quedado la curiosidad de percibir los cambios a medida que sucedan más profundamente.*
  - e) *Me parece que fue una gran experiencia, ya que esto si me hizo estar más segura de que cada día utilizamos la matemática pero que no nos damos cuenta.*

Los estudiantes reconocen que la metodología implementada es diferente y que permitió transformaciones en torno a los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Para ellos es una fortaleza que el trabajo realizado dejo comprensiones en torno a la temática estudiada, cuando partieron del desconocimiento. Esto una vez más ratifica la viabilidad de la propuesta implementada.

8. ¿Durante este periodo, qué transformaciones lograste hacer acerca de lo que podemos considerar un cambio?
- a) *Muchas, porque primero, tan solo pensaba en que un cambio era tan sólo físico, pero ahora tengo un conocimiento mas amplio y se como puede medirse.*
  - b) *Una de las transformaciones o cambios que obtuve en este período fue el mejoramiento de mi nivel académico y con relación al cambio que puede ser cualitativo y cuantitativo.*
  - c) *Pude transformar muchos conceptos que tenía de lo que era un cambio, pude investigar y comprender verdaderos e importantes conceptos del cambio y ahora puedo definir muy bien el concepto del cambio, además aprendí a medirlo.*
  - d) *Aprendí acerca de los cambios y en este período pude transformar la manera de percibirlos, ya que solo creía que existían los cambios cualitativos, pero me di cuenta que hay cambios que pueden medirse y se llaman cuantitativos.*
  - e) *Que el cambio no solo se da en la vida cotidiana o en nosotros mismos, sino que sin pensarlo hacemos cambios constantemente y estos pueden medirse o describirse.*

Con claridad enuncian las concepciones que tenían frente al cambio y las transformaciones ocurridas, y como logran comprender los procesos para la medición del cambio. Nuevamente se percibe que tienen claridad entre los tipos de cambio y como ellos se presentan en la cotidianidad.

9. ¿Recomendarías la metodología desarrollada durante este periodo (Enseñanza para la Comprensión) para futuros trabajos? ¿Por qué?
- a) *Si, porque es una manera muy creativa (variable) y muy exigente.*
  - b) *Si, porque de acuerdo a los cambios es donde se pueden obtener buenos trabajos.*
  - c) *Si, la recomendaría ya que esta metodología es muy fácil y nos ayuda a comprender la enseñanza, también nos ayuda a expresarnos y a desarrollar nuestras capacidades ya que pensábamos que no tenemos o que no somos capaces de desarrollarlas.*
  - d) *Si, porque creo que es una nueva manera en la que podemos profundizar mejor.*
  - e) *Si, porque creo que es mucho más fácil para entender algo, además porque así nos damos cuenta de muchas cosas que suceden a nuestro alrededor con ayuda de consultas, lecturas, etc.*

De la metodología los estudiantes aprecian la exigencia, la versatilidad y la flexibilidad para lograr la conceptualización. En ningún momento para ellos el trabajo externo se convierte en sobrecarga, sino que por el contrario se sienten partícipes de la experiencia transformando las relaciones de aula.

10. ¿Qué beneficios te aportó la realización del portafolio a lo largo del desarrollo de las actividades propuestas durante este periodo? ¿Lo utilizarías en otras materias?
- a) *Me beneficio en orden, en análisis, en razonamiento, cálculo y sobre todo mucha paciencia y perseverancia para hacer todo muy bien.*
  - b) *Uno de los beneficios es el haber trabajado en equipo y el otro haber aprendido conocimientos nuevos y lo utilizaría en otras materias si se presentará la oportunidad de trabajar con el.*
  - c) *Me aportó muchos beneficios ya que en este portafolio va incluido mucho tiempo y dedicación de nosotros. Si lo recomendaría y utilizaría en otras materias ya que nos ayuda y beneficia mucho.*
  - d) *Pienso que al desarrollar el portafolio las actividades y el desempeño del estudiante queda más evidente.*
  - e) *Si, de hecho ya lo he utilizado y me parece muy bueno porque al final nos damos cuenta de cuanto nos interesamos por aquel trabajo.*

Reconocen el portafolio como una herramienta que sistematiza y ordena el trabajo desarrollado, tanto en forma grupal como individual. Además, evidencia el proceso llevado a cabo y la calidad de las actividades realizadas.

Sugerencias o Comentarios

- a) *Este período fue el mejor de todos, por el trabajo realizado.*
- b) *El trabajo para mí fue bueno, ya que se trabajaban varias cosas sin salir de la matemática, el trabajo fue duro pero a la vez fácil.*
- c) *Un comentario que quiero hacer es que este tipo de trabajo nos da mayor oportunidades de ganar el periodo y así poder desarrollar nuestras capacidades.*
- d) *Fue muy bueno porque pude conocer la matemáticas realmente por todo lo aprendido.*
- e) *Me pareció super buena la metodología de estudio, además que no sentí el período de matemáticas y la profesora explica perfectamente ya que es fácil para entenderle.*

Estas respuestas permiten corroborar como el objetivo de investigación propuesto se cumple, sin embargo para determinar los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, se realizará un análisis mucho más exhaustivo en el capítulo 5, sección 5.1 página 136.



---

## Capítulo 5

# Conclusiones

---

**E**N este último Capítulo se exponen las conclusiones obtenidas a lo largo del proceso de investigación. Para una mejor comprensión de los alcances investigativos, se categorizarán los resultados desde los siguientes aspectos:

**Niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes:** se analizará con base en los contrastes entre los test (pre-test y post-test) y los avances percibidos en las elaboraciones realizadas por ellos. Para la descripción cualitativa de los logros alcanzados se cuenta con las matrices de evaluación diseñadas para tal fin y los mapas conceptuales contruidos por los alumnos en las diferentes fases del proceso.

**Cumplimiento de los objetivos:** se realizará un análisis del proceso de implementación de la guía metodológica en el aula de clase y se describirán los logros obtenidos durante el proceso de investigación.

**Aspectos para resaltar de la experiencia:** se describirán los aspectos positivos de la experiencia investigativa con relación al proceso de enseñanza y de aprendizaje y por ende de los sujetos participantes.

**Divulgación del trabajo de investigación:** se presenta una descripción de los artículos y las ponencias realizadas, las cuales muestran los avances obtenidos durante el proceso.

**Futuras líneas de investigación:** se presentan alternativas de continuidad del trabajo realizado, desde aspectos teóricos y prácticos.

Para dar cuenta de los resultados de la investigación, se analizarán las diversas herramientas metodológicas definidas en el Capítulo 3 en la sección 3.3, en la página 70, pero fundamentando los hallazgos desde la verbalización, la conceptualización y la solución a los problemas presentados por los estudiantes.

## 5.1. Descripción de los niveles de comprensión

Este apartado pretende dar cuenta de los alcances obtenidos por los estudiantes participantes, en relación al desarrollo de la comprensión, como habilidad de pensamiento. Es importante resaltar que en el marco de la EpC, lo que se busca es que el estudiante aprenda explorando, elaborando y construyendo. Que sea él mismo el generador de su propio aprendizaje y el maestro direccione estos hallazgos con el ánimo de obtener las conceptualizaciones propuestas en el diseño de la guía de actividades.

Los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, se describen a partir del análisis que se realizan con base en la información recolectada con las herramientas metodológicas utilizadas, como los matrices de evaluación, los test y los mapas conceptuales. A continuación se exponen estos hallazgos.

### 5.1.1. Análisis de las matrices de evaluación

De acuerdo a lo descrito en el Capítulo 3, en la sección 3.3.4, en la página 75, esta herramienta metodológica permitió evaluar cualitativamente a los estudiantes en los diferentes niveles alcanzados, referidos a las actividades propuestas, teniendo presente las modificaciones conceptuales realizadas a partir de las actividades de la fase de exploración hasta la fase del proyecto final de síntesis.

Con las matrices elaboradas se pretende hacer apreciaciones justas e imparciales de los trabajos de los estudiantes y permitir que ellos evalúen sus propias realizaciones y la calidad de las mismas. El procedimiento para cumplir este fin, consistió en que el docente asignara un nivel de comprensión con base en el desempeño que tuvo cada uno de ellos durante el proyecto, y en especial en la fase final.

Las matrices analizadas son presentadas en el capítulo 3, páginas 81, 82, 83 y los resultados, luego de la socialización de los proyectos finales, son los que se describen a continuación, aclarando que se hace la descripción desde la verbalización, la conceptualización y la solución del problema. Los 41 estudiantes participantes se ubicaron como novatos al inicio de la experiencia, de ellos 36 llegaron al final del proceso.

### La verbalización

En las diversas fases de intervención del proyecto, se pudo apreciar que las socializaciones fueron llevando a puntos de acuerdo sobre la utilización de cierto



lenguaje, y por este motivo, pudieron llegar a intercambiar ideas y construir significados personales y colectivos.

La verbalización se evaluó desde el manejo del lenguaje, la interacción con las personas asistentes, el desempeño en estos espacios de discusión y las habilidades comunicativas desarrolladas. Cada estudiante fue ubicado, tomando como referencia, sus logros en un nivel. A continuación se presentan los resultados en la Figura 5.1.

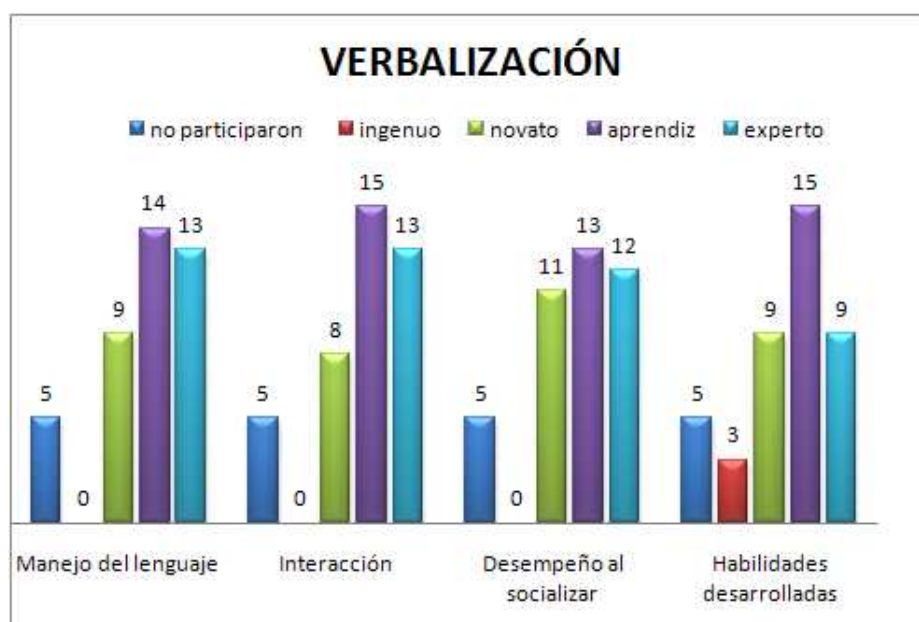


Figura 5.1: Representación gráfica de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes con relación a la verbalización.

A través de esta gráfica, puede percibirse que la mayoría de los estudiantes quedan ubicados en los dos últimos niveles de comprensión (aprendiz y experto) lo que da cuenta del avance logrado con relación a este aspecto. Puede decirse así, que los avances se dan desde la expresión oral, pero también desde las respuestas escritas, ya que son mucho más claras las intervenciones y las justificaciones de los problemas propuestos. Por lo anterior, cabe destacar que los participantes del proyecto alcanzaron los niveles más altos, que dependen en buen grado de la aplicación que se dio de la guía de actividades fundamentada en su relación con el contexto, logrando la apropiación de términos matemáticos.

## La conceptualización

Con las matrices de evaluación para la conceptualización, se busca describir el nivel de formalización que lograron los estudiantes, como también la comprensión de situaciones que implican este tipo de expresiones.

Los criterios evaluados responden al dominio y apropiación de los conceptos relacionados con la razón de cambio, la aplicación de lo aprendido y los procesos de generalización utilizados.

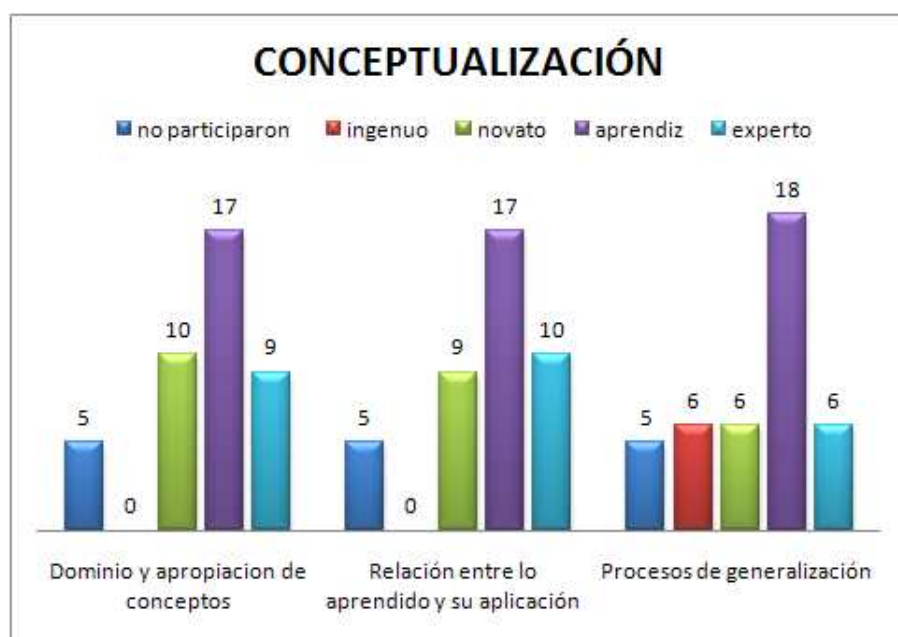


Figura 5.2: Representación gráfica de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes con relación a la conceptualización.

El nivel de aprendiz, para esta gráfica, es el que indica los avances de los estudiantes. En el nivel de ingenuo no se ubica ningún estudiante y es muy estandarizado el comportamiento que se presenta en el nivel de novato y experto. En este criterio los estudiantes se apoyaron en las representaciones gráficas para comprender la cuantificación de los cambios de las magnitudes variables y en las representaciones numéricas y geométricas para apreciar mejor la variación de las razones de cambio de las magnitudes relacionadas. Esto ratifica los avances en los niveles de comprensión.

### La solución del problema

Este criterio responde a la descripción de los últimos trabajos desarrollados por los estudiantes. Hace alusión a la evaluación de todas las estrategias implementadas por los participantes, para determinar la razón de cambio en la situación contextual que cada grupo seleccionó.

Para situarlos en alguno de los niveles propuesto en la matriz, se analiza la comprensión que se obtiene de la situación seleccionada, la estrategia planteada para hallar la razón de cambio, el desarrollo llevado a cabo para dar respuesta a la situación y los materiales de apoyo utilizados para la socialización de esta actividad.

La siguiente figura indica los niveles alcanzados por los estudiantes participantes.

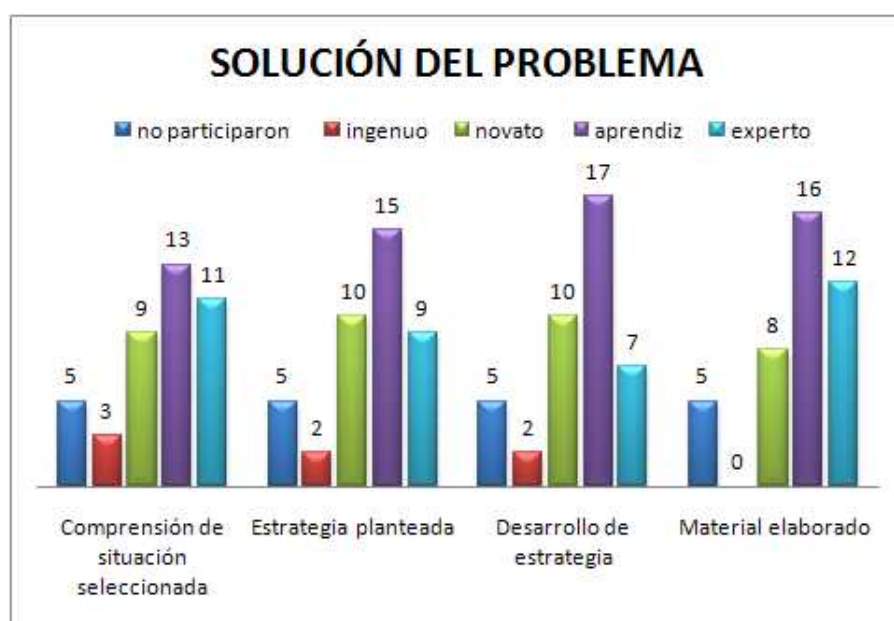


Figura 5.3: Representación gráfica de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes con relación a la solución del problema.

Como muestra la Figura 5.3, la variación que se observa a nivel de ingenuos se puede tomar como no representativo, ya que de una etapa a otra hay disminución, hasta llegar a eliminar totalmente este rango. Es relevante en esta parte, el comportamiento que muestran los niveles aprendiz y experto, debido a que esta primera se sostiene en un mismo rango, pero el nivel de experto muestra un incremento notable, lo que indica una evolución a través de cada etapa y consolida el aprovechamiento y comprensión de la aplicación de la EpC, el dominio mejorado del tema, la capacidad de aplicación de lo aprendido y el presentarlo a otras personas, como parte del proceso de aprendizaje.

Es importante resaltar como la matematización se convierte en una herramienta para expresar la solución del problema en términos matemáticos y en cada situación propuesta por los estudiantes se utilizó correctamente.

Se muestra también, que en las descripciones de los niveles de comprensión alcanzados por la propuesta investigativa, cumple su objetivo, pues se avanza en torno a la conceptualización de la razón de cambio, pero estableciendo como marco metodológico la EpC. A continuación se describen los avances logrados por los estudiantes con base en el contraste entre el pre-test y el post-test.

### 5.1.2. Análisis de los pre-test y post- test

Esta herramienta metodológica permite describir las diferentes posturas que se perciben en los estudiantes teniendo como referente sus elaboraciones escritas, es decir con relación a la verbalización, las conceptualizaciones logradas y las percepciones frente a la experiencia de enseñanza y de aprendizaje.

#### La verbalización

Al contrastar los test, se puede percibir que los estudiantes elaboran mucho más sus respuestas, que logran definir con mayor claridad los cambios y describir los procesos que ayudan a determinar la razón de cambio. A continuación se presenta un cuadro que contrasta las percepciones de los estudiantes al inicio y final de la experiencia.

Contraste de los test aplicados	
La Verbalización	
<b>Pre- test</b>	Definen el cambio desde lo descriptivo y son poco concretos.
<b>Post - test</b>	Logran definir el cambio desde lo cualitativo y cuantitativo.

Cuadro 5.1: Análisis de los test con relación a la verbalización.

Que los estudiante logren expresar lo relacionado al cambio en términos de magnitudes y no exclusivamente en torno a descripciones, es producto de un proceso de elaboración conceptual respecto al cambio. Esta situación demuestra la asimilación comprensiva que se logro en el proceso investigativo con los estudiantes participantes.

### La conceptualización

En las respuestas dadas por los estudiantes en estos dos test, demostraron el dominio y apropiación de los conceptos fundamentales, asociados a la razón de cambio y la relación con otros conceptos posibles que fundamentaron el proceso. El siguiente cuadro resume las percepciones obtenidas:

Contraste de los test aplicados	
La Conceptualización	
<b>Pre- test</b>	No se tiene claridad sobre el concepto de razón de cambio y mucho menos del procedimiento matemático que permite determinarla.
<b>Post - test</b>	Se reconocen los cambios y los tipos de cambio y al mismo tiempo el concepto objeto de estudio y la forma como puede cuantificarse.

Cuadro 5.2: Análisis de los test con relación a la conceptualización.

Este cambio de percepción de los estudiantes en cuanto al cambio, ratifica el desarrollo del pensamiento matemático en relación a lo variacional, lo que continua indicando que la propuesta de investigación cumple los objetivos trazados.

### La experiencia de enseñanza y de aprendizaje

Los estudiantes con las respuestas dadas en los test, demuestran cambios en su experiencia de aprendizaje, que está medida por el cambio en la experiencia de enseñanza. Se percibe que los estudiantes se motivaron con la implementación de la guía de actividades y como en esta se planteaba el desarrollo conceptual desde situaciones reales. Se cumple entonces con la conceptualización de la razón de cambio desde diversos contextos, un gran avance en el desarrollo del pensamiento variacional. En el siguiente cuadro se presentan las percepciones de los estudiantes cerca a la experiencia de aprendizaje y de enseñanza, de acuerdo al análisis del pre-test y del post-test.

Contraste de los test aplicados	
La experiencia de enseñanza y aprendizaje	
<b>Pre- test</b>	No hay relación de la matemáticas con el contexto y se percibe poca motivación frente al área.
<b>Post - test</b>	Demuestran motivación en torno a las matemáticas debido a la relación que logran establecer con el contexto.

Cuadro 5.3: Análisis de los test con relación a la solución de problemas.

El que los estudiantes después de la experiencia quedaran motivados frente al área, es una situación que valida el principio de la EpC y además sustenta la viabilidad de la propuesta en términos del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

### **5.1.3. Análisis de los mapas conceptuales**

Los mapas conceptuales realizados bajo las tres finalidades: como ruta de aprendizaje, extracción de significados y/o síntesis y con fines evaluativos, permitieron orientar los diferentes procesos de aprendizaje y de enseñanza. Además, logran dar cuenta de los avances, en las relaciones conceptuales planteadas. Al mismo tiempo sirvieron como insumo para determinar el nivel de comprensión que lograron los estudiantes al finalizar el proceso.

## **5.2. Conclusiones con relación al cumplimiento de los objetivos**

En este apartado, se describen los logros ante la implementación de la propuesta investigativa respecto al objetivo general y a los específicos propuestos para el trabajo de aula.

### **5.2.1. General**

Respecto al proceso de enseñanza y de aprendizaje para la conceptualización de la razón de cambio, fue importante haber definido las matrices de evaluación y haber analizado la variación que se presentó entre los diferentes test, así como la implementación de la guía de actividades, pues fueron la base del proceso de investigación, y además, orientaron el mismo a lo largo de su desarrollo.

De acuerdo a los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, lo cual se describió en la sección anterior, el Objetivo General de la investigación se cumple (ver Capítulo 2, página 48), ya que se logra establecer la propuesta como algo viable dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje, pues tanto el docente como los estudiantes, cumplen el propósito definido en términos de la conceptualización de la razón de cambio.

Se resalta entonces, que en la última etapa, los estudiantes mejoraron en lo que respecta al rendimiento académico de esta área, pues se obtuvo una diferencia

significativa en los resultados obtenidos por ellos.

Los resultados a los que se hace alusión, muestran que es posible construir soluciones al problema de investigación planteado en el Capítulo 2, donde se describió, como la falta de contextualización y la fuerza que se le da al carácter algorítmico y procedimental en la clase de matemáticas, dificulta comprender los conceptos. El proceso llevado a cabo mostró la necesidad de enfatizar propuestas de intervención de aula que vincularan diversos registros de representación, para lograr el establecimiento de relaciones entre el concepto trabajado.

Por lo anterior, el diseño de la guía de actividades para el concepto de razón de cambio, permite planificar, desarrollar y aplicar una experiencia de aprendizaje para que los alumnos puedan progresar en los niveles de comprensión, ya que durante su aplicación, los alumnos logran reformular sus planteamientos, permitiendo una mejor integración entre los elementos teóricos y prácticos del concepto objeto de estudio.

Respecto a la viabilidad de la propuesta, se afirma que el balance entre la situación recurrente y los resultados obtenidos, es positiva en cuanto a la posibilidad de introducir el estudio sobre la razón de cambio a partir de la aplicación de situaciones contextuales. Las concepciones de cambio, lograron ser comprendidas por los estudiantes participantes desde los registros gráficos y numéricos, y esto se evidencia de manera mas clara, al ver la propiedad con que trataron las situaciones de variación. El apoyo en la calculadora gráfica, como instrumento mediador que permite acercamientos visuales, es importante, pues mostrar la dinámica que subyace a una situación de cambio y la manera como aporta elementos para su análisis.

La relación de situaciones de cambio con otras ciencias, contribuyó a percibir la matemática como una ciencia que se relaciona con las demás y no como un ente aislado y autónomo en el acontecer académico de los estudiantes

### 5.2.2. Específicos

Para la revisión y verificación del cumplimiento de los objetivos específicos, es necesario observar los desarrollos obtenidos por los estudiantes participantes de la experiencia (ver Capítulo 4), sin embargo, es importante mencionar otros logros obtenidos durante el proceso de investigación, en distintos aspectos:

- La guía de actividades dentro de la investigación, se consideró la estrategia metodológica para lograr el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la razón de cambio.

Su aplicación, permitió que la actitud asumida por parte de los alumnos

participantes de la experiencia, fuera fundamental para el desarrollo del proyecto. El nivel de compromiso e interés, dieron cuenta de la motivación como factor contribuyente, para que las actividades fueran llevadas a cabo completamente y se lograra la comprensión del concepto objeto de estudio, con actividades dinámicas y de fácil asimilación.

- El relacionar diversas situaciones reales donde ocurrían variaciones fue uno de los aspectos más relevantes para los estudiantes participantes, pues permitió que comprendieran más fácilmente el concepto estudiado. Así mismo, posibilitó el estudio de las matemáticas desde la contextualización, descentrándola de su carácter procedimental. Es decir, no se pierde la generalidad característica de esta área, pero no son los algoritmos el recurso fundamental del proceso de enseñanza y de aprendizaje.
- Se generan las matrices de evaluación como herramienta metodológica que permitió determinar los diversos niveles de comprensión de los estudiantes, reconociendo por medio de los criterios de evaluación avances de los estudiantes en torno a la verbalización, la conceptualización y la solución de problemas.
- La elaboración de los mapas conceptuales, permite una forma de explorar el lenguaje empleado por los alumnos durante la intervención de aula. Además, permite hacer un mejor seguimiento y evaluación de las nuevas relaciones conceptuales que han generando los alumnos durante el proceso, pero a su vez encara al estudiante con nuevos términos y conceptos que debe apropiarse a su lenguaje y entendimiento.

Lo anterior se ve reforzado, cuando Esteban [18, p. 154], afirma que “al indagar por un concepto específico a través de los mapas conceptuales, el docente puede darse cuenta del tipo de relaciones construidas por los alumnos, con que otros conceptos lo relacionan, el lenguaje utilizado y el grado de integración entre ellos. Al evaluar esta información, la instrucción se puede orientar a ayudarle a los alumnos a ampliar la red de relaciones”.

A partir de lo anterior, se puede concluir el alcance de los objetivos específicos y a su vez, de la comprensión que lograron los estudiantes del concepto de razón de cambio, rompiendo con el transmisionismo como método de enseñanza. Con base en los resultados alcanzados, en el siguiente apartado se mencionan los aspectos relevantes del proceso investigativo.



### 5.3. Aspectos para resaltar de la experiencia

El hecho de que los alumnos sean los protagonistas, impone una disminución de los contenidos del currículo en beneficio de los procesos constructivos que permitan la conceptualización en lugar de la algorítmia. Esto permitió que existiera una motivación diferente respecto a los procesos anteriores. Este cambio fue benéfico para los estudiantes y para mí como docente.

Los procesos de aprendizaje de los alumnos se ven fuertemente influenciados por la interacción que se da en el aula de clase. Es en la discusión de los grupos, donde surgen las mejores interpretaciones y conclusiones entre los alumnos e incluso donde el profesor encuentra mejores elementos para promover el análisis. Gracias al ambiente de aprendizaje, los instrumentos usados y al tipo de tareas propuestas, se fue logrando un clima favorable para la construcción conceptual a partir de la participación y negociación de significados.

### 5.4. Divulgación del trabajo de investigación

Se presenta una descripción de los artículos realizados durante el proceso de la elaboración del trabajo de grado. Además, se muestra cada una de las ponencias realizadas en el mismo periodo, las cuales muestran los avances que se iban obteniendo durante el proceso.

#### 5.4.1. Artículos

Durante el proceso de investigación se realizaron cuatro artículos, de los cuales uno fue publicado (ver Apéndice F, página 181), el otro fue revisado, aceptado y está en proceso de publicación y los otros dos están en proceso de revisión.

**Los mapas conceptuales en el procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de razón de cambio.**

**Resumen:** En la enseñanza de conceptos matemáticos la comprensión y manipulación de algoritmos son procesos necesarios que deben relacionarse con contextos propios de la vida cotidiana durante el ciclo escolar. Para ello, es importante que los maestros incorporen en los procesos de enseñanza herramientas que ayuden a la exploración, la sistematización y la síntesis de información de manera que los estudiantes formen parte activa de sus procesos de aprendizaje. El estudio

del concepto de razón de cambio se inicia en la educación básica junto con otros temas de matemáticas y de disciplinas como la geometría, la economía, la física, entre otras. Los mapas conceptuales permiten que los estudiantes relacionen este concepto en las diversas áreas de estudio permitiéndoles encontrar similitudes y diferencias interpretativas en cada una de ellas.

**Estado:** Publicado

**Revista:** Memorias del Tercer encuentro Internacional sobre Mapas Conceptuales. Tallinn, Estonia. 2008

### 5.4.2. Ponencias

A continuación se hará una relación de las ponencias, que nos permitieron socializar los avances del trabajo de grado, estas se realizaron en encuentros, congresos y seminarios a nivel nacional, regional y local.

1. *“Estrategias de intervención pedagógica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para el concepto de derivada”*. XIII Congreso de la Escuela Regional de Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira. Septiembre 2006.
2. *“Estrategias de intervención pedagógica en el proceso de aprendizaje - enseñanza de las matemáticas para el concepto de derivada”*. Octavo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Universidad del Valle. Marzo de 2007.
3. *“Una estrategia de intervención metodológica para el proceso de conceptualización matemática de la razón de cambio”*. XVI Congreso Nacional de Matemáticas. Plaza Mayor. Centro de Convenciones. Medellín. Julio de 2007.
4. *“Enseñanza para la Comprensión aplicada en conceptos matemáticos”*. Segundo Encuentro Regional de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Católica Popular de Risaralda. Septiembre de 2008.
5. *“El proceso de enseñanza - aprendizaje de la razón de cambio mediado por los mapas conceptuales”*. Noveno Encuentro de Matemáticas Educativas. Universidad Popular del Cesar. Valledupar. Octubre de 2008.

### 5.4.3. Futuras líneas de investigación

En el transcurso de esta investigación se ha observado la necesidad de diseñar e implementar nuevas investigaciones tanto a nivel teórico como práctico, que tengan

como fundamento metodológico la Enseñanza para la Comprensión. Es por ello que se plantean las siguientes líneas de trabajo:

- Diseñar con base en los resultados obtenidos en esta investigación, una guía de actividades para desarrollar los conceptos propios del Cálculo como la derivada y otros asociados, con el fin de convertir esta herramienta en una base del proceso de enseñanza y de aprendizaje.
- Comprobar si en realidad un alumno que trabaja en el marco metodológico de la EpC, presenta diferencias, respecto a un alumno que aprende las matemáticas desde el carácter operatorio, y si se confirman dichas diferencias determinar los niveles de comprensión alcanzados.

De acuerdo con lo anterior, estas consideraciones y las observaciones realizadas en los diversos Capítulos de este proyecto de investigación, muestran el cumplimiento de los objetivos planteados en el Capítulo 2 en la página 48 demostrando como este trabajo hace un aporte significativo a la solución del problema de investigación.



---

## Apéndice A

# Guía de actividades

---

**L** La guía de actividades presentada en este apéndice fue la implementada en el aula de clase para conceptualizar la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión como enfoque metodológico.

### A.1. Hilo conductor

Los estudiantes comprenderán a partir de los incrementos o disminuciones en la vida diaria la razón de cambio

### A.2. Actividades de la fase de exploración para la conceptualización de la razón de cambio

#### A.2.1. Desempeños de comprensión

- *Consultar en diversas fuentes (diccionarios, entrevistas, consultas en textos, etc.) lo que se percibe como un cambio.*
- *Entrevistar a diversas personas con el propósito de indagar sobre lo que es el cambio para ellos, la descripción que hacen y la forma como lo perciben.*
- *Reconocer en su entorno situaciones de cambio de tipo cualitativo y cuantitativo.*

**Actividad No. 1: ¿Qué es un cambio?**

Figura A.1: La respuesta a esta pregunta implica reconocer los contextos.

Las siguientes actividades son de carácter individual, realícelas respondiendo a cada uno de los parámetros establecidos.

1. Consulte en diversas fuentes: diccionarios, enciclopedias, Internet, etc. ¿Cual es la definición de cambio? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. Entrevistar a 5 personas diferentes, interrogándolas con las siguientes preguntas:
  - a) ¿Qué piensa usted que es un cambio?
  - b) ¿En su trabajo o vida diaria como puede percibir un cambio?
  - c) Describa algunos cambios que percibe.

Procure tener evidencias respecto a las entrevistas realizadas.

3. Después de haber realizado la consulta sobre el cambio y las entrevistas, ¿Qué conclusión puede obtener? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## Actividad No 2: ¿Hay variaciones?



Figura A.2: Los terremotos y otras situaciones reales permiten determinar cambios.

1. Observa con atención los videos presentados sobre un terremoto, el crecimiento de un animal y la secuencia fotográfica de construcción de un edificio.
2. Con tu grupo de compañeros dialoga sobre los cambios o variaciones ocurridas y descríbelos en el siguiente espacio.

**Terremoto**\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Nacimiento de un ave**\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Construcción de un edificio**\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3. ¿Es posible que alguno de los cambios sea medible numéricamente? Explique\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

a) ¿Cuáles? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) ¿Cómo puede realizarse esta medición? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Actividad No 3: Mezcla de colores**

Figura A.3: El cambio de color, ¿Un cambio de qué tipo?

**Materiales:**

- Pintura de color amarillo
- Pintura de color azul
- Gotero
- Plato
- Palito para revolver

**Procedimiento**

1. Tome con un gotero y deposite 10 gotas de color amarillo sobre el plato o superficie que vaya a ser utilizada para revolver
2. Sobre la pintura amarilla deposite gota a gota, 10 gotas de color azul pero cada que caiga una gota revuelva las pinturas y describa lo que ocurre. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. ¿Es posible determinar cuánto cambio el color amarillo, cada vez que cayó una gota azul? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



## Actividad No 4: Mediciones de temperatura



Figura A.4: ¿Qué sucede con la temperatura?

**Materiales:**

- Un termómetro
- Un recipiente que pueda calentarse
- Un litro de agua
- Un cronómetro o reloj
- Un mechero o algo donde pueda calentarse

**Procedimiento**

1. Poner el agua a hervir utilizando los implementos necesarios
2. Realizar un registro de la temperatura cada dos minutos hasta que el agua este en estado de ebullición

Tiempo (min.)									
Temperatura (°C)									

Cuadro A.1: Registro de temperatura en aumento

- a) ¿Qué pasa con la temperatura a medida que pasa el tiempo según el registro tabular de la temperatura en aumento?\_\_\_\_\_

---



---

3. Cuando llegue al punto de ebullición, baje el recipiente del fuego e inicie nuevamente el registro de temperatura cada dos minutos hasta que llegue a la temperatura ambiente.

Tiempo (min.)									
Temperatura (°C)									

Cuadro A.2: Registro de temperatura en disminución

- a) ¿Qué puede concluirse respecto a la temperatura según el registro tabular de la temperatura en disminución?\_\_\_\_\_
4. ¿Es posible determinar cuanto cambio la temperatura del minuto 4 al minuto 10, antes de que el agua este en estado de ebullición? Describa el proceso que debería de realizarse y de ser posible encuentre el valor. \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
5. Graficar en el *plano1* la tabla del aumento de la temperatura y en el *plano2* la tabla de la disminución de la temperatura, asociando el eje horizontal con el tiempo y el eje vertical con la temperatura. ¿Respecto de las gráficas que modificaciones ocurre y como pueden justificarse?

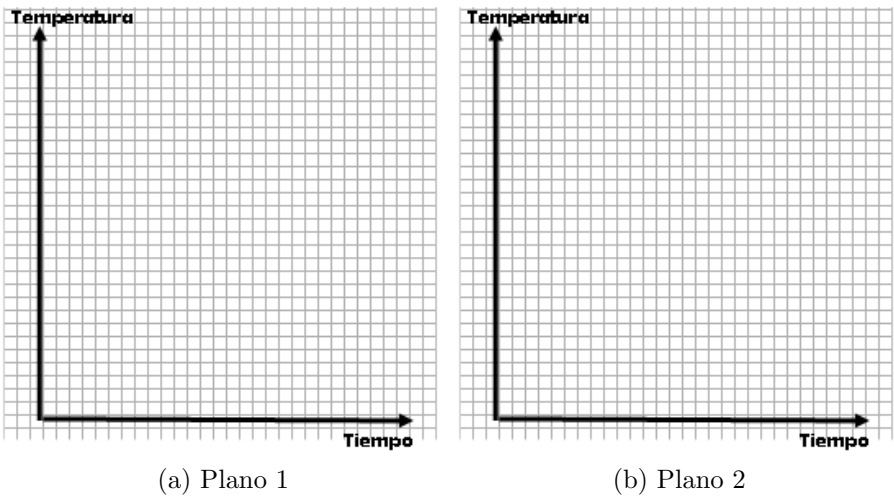


Figura A.5: Plano 1 y 2 para graficar tabla 1 y 2

---

---

### Actividad No 5: ¿Cuánto crece?



Figura A.6: Descripción del crecimiento de una planta.

#### Materiales:

- Un grano de frijol
- Un vaso desechable
- Un algodón

#### Procedimiento

1. Humedezca el algodón y deposite el frijol en el vaso desechable. Una vez haya realizado esto, empiece a llevar un registro cada dos días en donde responda que variaciones tiene la planta y cuanto crece durante 20 días. Para la descripción de las observaciones utilice la siguiente tabla.
2. Debe de implementar una estrategia para hacer la medición de la planta. Describa que herramienta utilizará o como será el proceso para realizar dicha valoración...

---

---

FECHA	CAMBIOS DE CARACTERÍSTICAS	ALTURA

Cuadro A.3: Descripción cualitativa y cuantitativa del crecimiento de una planta.

3. ¿Cómo podría determinarse el incremento de tamaño de la planta desde el día 8 de sembrada hasta el día 20 en que se hace el último registro? \_\_\_\_\_

---



---

4. Analice con detenimiento las columnas del registro. ¿Existen diferencias entre los distintos registros? A que factores se deben dichas diferencias. \_\_\_\_\_

---



---

### A.3. Actividades de la fase de la investigación guiada para la conceptualización de la razón de cambio

#### A.3.1. Desempeños de comprensión

- *Determinar la razón de cambio subyacente de una situación seleccionada, apoyados en representaciones geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas.*

**Actividad No 1: El cambio climático**

Figura A.7: ¿Que ocurre con el clima?

1. Lee el cuento ¡Un calor achicharrante! Y responde las siguientes preguntas.

a) ¿Por qué se produce el incendio y cómo puede describirse el fenómeno que causa el incendio?\_\_\_\_\_

---

---

---

b) Busca información referida al cambio climático y organízala en tablas y gráficos que permitan observar los incrementos o disminuciones ocurridos a lo largo del tiempo.

**Actividad No 2: ¿Cuánto cada cuanto?**

Figura A.8: Saber cuánto varía algo, está asociado a la razón de cambio.

Juan Pablo tiene un auto último modelo, cada que llena el tanque debe pagar un monto de dinero. El está buscando una forma rápida de saber cuanto paga por cierto número de galones de gasolina. ¿Tú puedes ayudar a Juan Pablo a encontrar una respuesta?. Completa la siguiente tabla.

Galones de gasolina	1		3		5		8	
Precio por galón			10050		16750	20100		30150
Precio/galón								

Cuadro A.4: Cálculo de la razón de cambio.

1. Al realizar la división entre el precio y el número de galones, ¿Qué significado se le puede asignar a dicho resultado? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
2. ¿Cuál es la respuesta que le darías a Juan Pablo? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
3. Si a Juan Pablo le interesara la respuesta como una expresión algebraica, ¿Qué podrías decirle? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

### Actividad No 3: El triángulo que cambia



Figura A.9: Variaciones en un triángulo.

Para la solución de la situación propuesta se manipulará la calculadora Voyage 200 o TI 92, interactuando con una figura dinámica creada en CABRI como la siguiente.

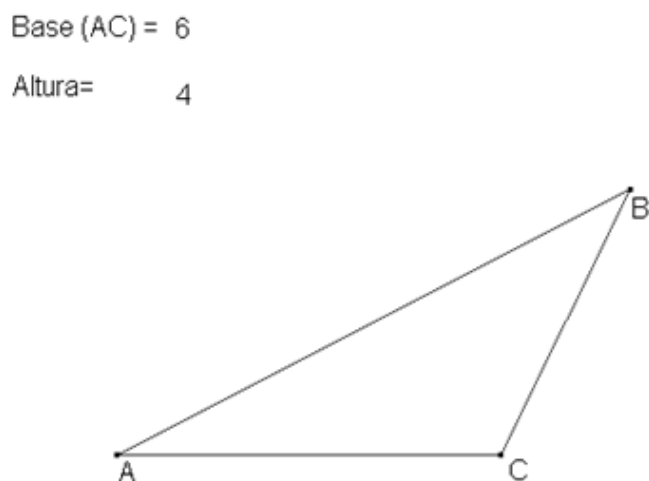


Figura A.10: Gráfica de la calculadora.

Donde es posible variar el valor del segmento  $AC$ , de la altura del triángulo y desplazar el punto  $B$  en sentido horizontal, logrando que el triángulo cambie de forma.

1. Dado el triángulo **ABC**, variar el valor del segmento **AC**, dejar la altura definida y calcular el área. Realizar una tabla por lo menos para 10 valores.

Altura:\_\_\_\_\_

AC								
ÁREA								

Cuadro A.5: Cálculo del área del triángulo variando la base.

2. Realiza la representación gráfica de la tabla anterior.

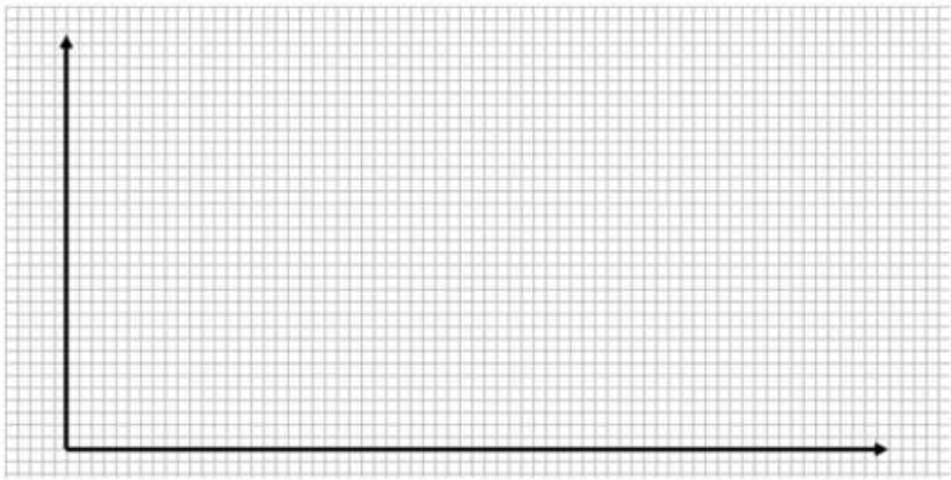


Figura A.11: Plano para graficar tabla del área del triángulo variando la base.

3. ¿Qué puedes decir respecto a la gráfica trazada? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4. Llena la siguiente tabla con los valores hallados.

AC										
ÁREA										
AREA/AC										

Cuadro A.6: Cálculo de la razón de cambio entre el área y la base del triángulo .

¿Qué puedes decir del valor hallado? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5. Con el mismo triángulo *ABC*, deja constante el valor del segmento *AC* y realiza variaciones a la altura del polígono. Calcula el área. Registra los datos en la siguiente tabla.  
AC: \_\_\_\_\_

6. Realiza la representación gráfica de la tabla anterior.



ALTURA									
ÁREA									

Cuadro A.7: Cálculo del área del triángulo variando la altura.

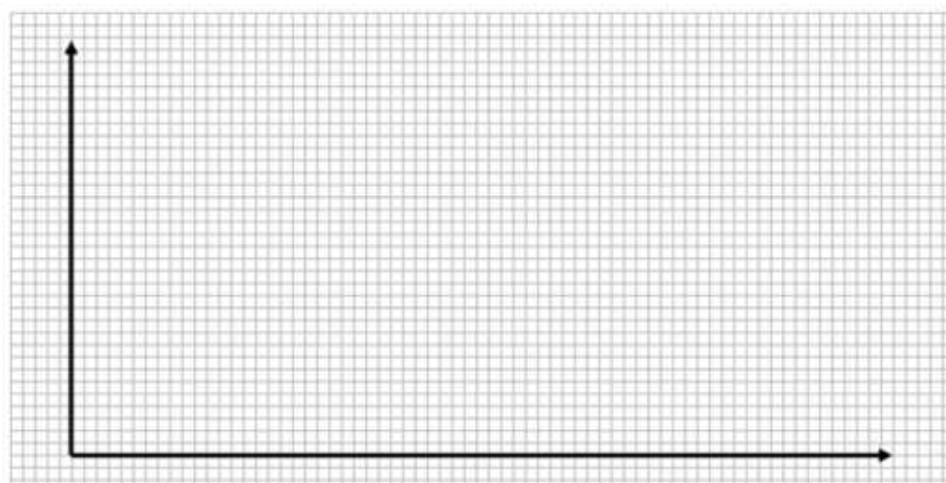


Figura A.12: Plano para graficar tabla del área del triángulo variando la altura.

7. ¿Qué pasaría con el área del triángulo si desplazamos el punto  $B$ , pero la altura y el segmento  $AC$  son constantes?\_\_\_\_\_

---



---

8. ¿Qué pasaría con el área del triángulo si desplazamos el punto  $B$  y hacemos que varíe la altura y el segmento  $AC$  ?\_\_\_\_\_

---



---

**Actividad No 4: Mucha distancia, mucho tiempo o mucha velocidad**

Figura A.13: La velocidad como razón de cambio.

1. Coloque el carro dinámico que aparece en pantalla a desplazarse. Mueva el cursor para iniciar desplazamiento.
2. Antes de iniciar a tomar los datos, realice un bosquejo de la gráfica que representaría la distancia vs. el tiempo del carro dinámico y explique porqué sería la gráfica de esta forma.

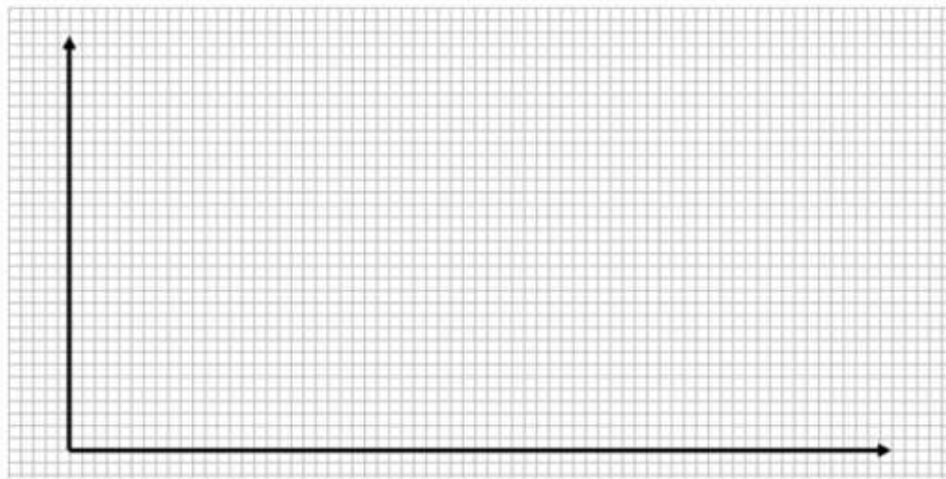


Figura A.14: Plano para gráfica de distancia vs. tiempo.

3. Anime la imagen del carro para permitir que la calculadora capture los datos automáticamente. Observe la gráfica que realiza la calculadora de distancia vs tiempo.
4. Dibuje sobre el siguiente plano la gráfica que aparece en la calculadora.

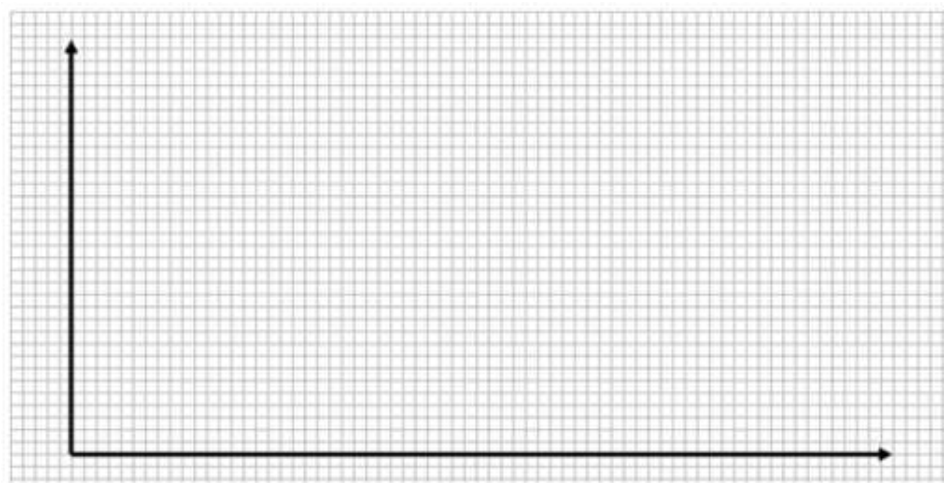


Figura A.15: Plano para la gráfica que aparece en la calculadora.

5. ¿Qué similitudes y/o diferencias existen entre la gráfica que usted planteó y la realizó la calculadora? \_\_\_\_\_

---



---

6. De la gráfica realizada por la calculadora, traslade los datos a la siguiente tabla. Puede que sea necesario realizar aproximaciones de la distancia y del tiempo que aparecen en la gráfica para completar la tabla, por ello tomo el valor más cercano o su mejor estimación.

Tiempo	Distancia	Variación tiempo	Variación distancia	$\frac{\text{V. distancia}}{\text{V. tiempo}}$
1.0				
1.5				
2.0				
2.5				
3.0				
3.5				
4.0				
4.5				
5.0				

Cuadro A.8: Tabla de datos distancia vs tiempo.

7. ¿Qué ha observado en los valores de la distancia y en la variación de la misma?\_

8. ¿Qué representa el resultado de la  $\frac{V. \text{ distancia}}{V. \text{ tiempo}}$

---

---

9. ¿Cómo muestran los resultados que el coche tenía la velocidad? Justifique la respuesta.

---

---

10. ¿Qué distancia alcanzaría el coche en 10 segundos? ¿Y en un minuto? Describa el procedimiento utilizada para dar estas respuestas. \_\_\_\_\_

---

---

## A.4. Actividades de la fase de síntesis y actividades complementarias

### A.4.1. Desempeños de comprensión

- *Seleccionar una situación del entorno en la que se evidencie un cambio cuantitativo.*
- *Exponer a sus compañeros el proceso desarrollado para medir y definir razones de cambio.*
- *Determinar relaciones con otras situaciones del contexto.*

## Actividad No 1: ¿Qué varía?



Figura A.16: Es necesario reconocerlas las variaciones.

En los siguientes enunciados, determinar cuales de las variables varían, completar la tabla propuesta y hallar la razón de cambio además, definir la expresión algebraica para la situación planteada.

1. Se estima que dentro un año un pueblo con 5 millones de habitantes tendrá un cambio de 500 personas en la población. ¿Cuál sería el cambio para 12 meses? \_

---



---

- a) Llene la siguiente tabla según el enunciado planteado.


Cuadro A.9: Razón de cambio de la población.

- b) ¿Cuál es la variable dependiente y la independiente? ¿Por qué?\_\_\_\_\_

---



---

- c) ¿Cuál es la expresión algebraica que generaliza la situación? Explique\_\_\_\_\_

---



---

- d) ¿Qué se puede afirmar de la razón de cambio? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
2. Un trabajador ensambla 3 piezas cada media hora. ¿A que razón ensambla una pieza el trabajador? ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

a) Llene la siguiente tabla según el enunciado planteado.


Cuadro A.10: Razón de ensamble de una pieza por trabajador.

- b) ¿Cuál es la expresión algebraica que generaliza la situación? Explique \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
- c) ¿Qué se puede afirmar de la razón de cambio? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
3. Realiza la representación gráfica de una de las situaciones anteriores.

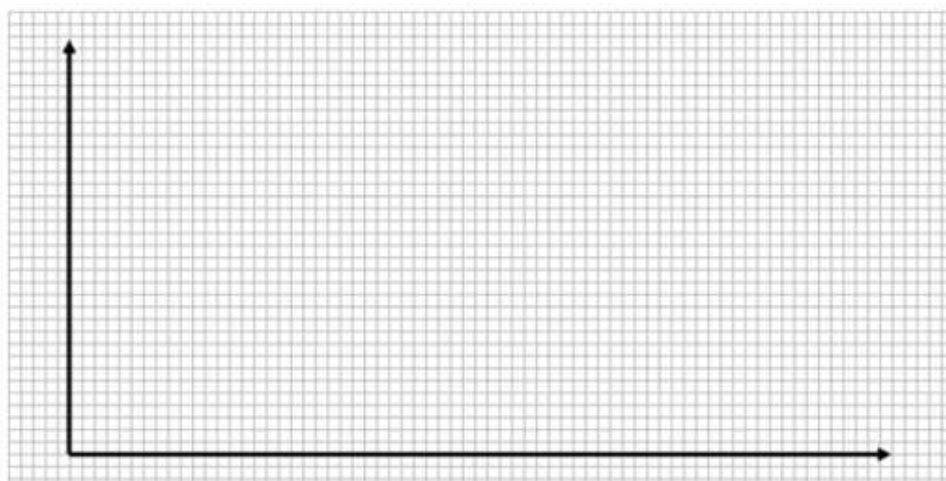


Figura A.17: Gráfica de la razón de ensamble por trabajador.

*a)* ¿Qué puedes decir respecto a la forma de la gráfica trazada?\_\_\_\_\_

---

---

*b)* ¿Determina cuánto es la variación de la situación desde el dato 3 hasta el 8, apoyado en la gráfica? \_\_\_\_\_

---

---





---

## Apéndice B

### El pre - test

---

EL pre-test, tenía como finalidad registrar lo que los alumnos pensaban sobre el cambio, la forma de concebirlo en el contexto y maneras de hallarlo, antes de la experiencia de enseñanza y aprendizaje en el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Este test no pretendía, en ningún momento, indagar la destreza de los alumnos para resolver cálculos asociados a la razón de cambio, por el contrario lo que buscaba era pre-conceptos antes de la experiencia.

***ENCUESTA PARA ESTUDIANTES SOBRE ASPECTOS  
RELACIONADOS CON LA MATEMÁTICA  
2007***

Esta encuesta tiene como objetivo indagar por la comprensión que como estudiante pueda tener ante diversas situaciones de la vida diaria que tienen relación con la matemática. Procure responder todas las preguntas de forma clara. Las respuestas sólo tienen valor académico.

#### **Información general**

Nombre: \_\_\_\_\_

Grado que cursa: \_\_\_\_\_

#### **Preguntas**

1. ¿Para usted qué es un cambio o una modificación? \_\_\_\_\_

2. ¿De qué forma nos damos cuenta de que ha ocurrido un cambio o modificación?

---

---

3. Indique varias situaciones de la vida diaria en donde se producen cambios o modificaciones. \_\_\_\_\_

---

---

4. Explique como puede medirse el cambio o la modificación en una de las situaciones definidas en el ítem anterior. \_\_\_\_\_

---

---

5. ¿Es necesario para nuestra vida medir los cambios o las modificaciones? Si, No.  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

6. ¿Por qué puede considerarse importante medir los cambios o las modificaciones?

---

---

7. Hoy en Medellín la temperatura fue de 17 C a las 6: 00 a.m., 23 C a las 10: 00 a.m., 25 C a la 1: 00 p.m. y de 21 C a las 7 p.m.

- a) ¿Qué cambios o modificaciones se dan en la temperatura entre las 6: 00 a.m. y las 10: 00 a.m.? \_\_\_\_\_

---

- b)* La temperatura aumenta o disminuye. ¿Cómo se puede justificar esta situación?\_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- c)* Entre la 1: 00 p.m. y las 7. 00 p.m., ¿Qué cambio se da en la temperatura?\_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- d)* La temperatura aumento o disminuyó en este espacio de tiempo. Explica tu respuesta.\_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

**Muchas gracias por su valiosa colaboración.**



---

## Apéndice C

# El post - test

---

**C**On este test, se buscó indagar sobre las relaciones que los alumnos lograron construir a través del trabajo realizado en el aula y comparar con lo expresado en el pre-test al inicio del periodo lectivo.

### ENCUESTA FINAL PARA ESTUDIANTES SOBRE ASPECTOS RELACIONADOS CON LA MATEMÁTICA 2007

Esta encuesta tiene como objetivo indagar sobre los niveles de comprensión que como estudiante lograron después del desarrollo de diversas actividades que tienen relación con la matemática. Procure responder todas las preguntas de forma clara. Las respuestas sólo tienen valor académico.

#### Información general

Nombre:\_\_\_\_\_

Grado:\_\_\_\_\_

1. ¿Con el desarrollo de las actividades propuestas, has obtenido nuevas comprensiones acerca del cambio en el mundo real? Explique\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. Al trabajar todas las situaciones de cambio propuestas, ¿Qué nuevas experiencias de aprendizaje lograste? Justifique.\_\_\_\_\_

- 
- 
3. En la selección y desarrollo del proyecto final de síntesis, ¿Qué elementos de la vida cotidiana y conceptos de otras asignaturas influyeron en la elaboración y ejecución?\_\_\_\_\_
- 
- 
4. ¿Qué cambios o modificaciones pueden ser medidos en nuestra vida? Explique.\_\_\_\_
- 
- 
5. ¿Qué nuevas situaciones lograste comprender y utilizar para determinar si ha ocurrido un cambio o modificación y el valor de este? Explique\_\_\_\_\_
- 
6. ¿Se necesita del cambio para explicar algunos fenómenos de la vida diaria? ¿Por qué? Cite algunos ejemplos.\_\_\_\_\_
- 
- 
7. ¿Qué experiencia te deja el hecho de haber estudiado una situación aplicando los conceptos de matemática estudiados?\_\_\_\_\_
- 
- 
8. ¿Durante este periodo, que transformaciones lograste hacer acerca de lo que podemos considerar un cambio?\_\_\_\_\_
- 
- 
9. ¿Recomendarías la metodología desarrollada durante este periodo (Enseñanza para la Comprensión) para futuros trabajos? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
-

- 
10. ¿Qué beneficios te aportó la realización del portafolio a lo largo del desarrollo de las actividades propuestas durante este periodo? ¿Lo utilizarías en otras materias?

---

Sugerencias o Comentarios

---

---

---

**Muchas gracias por su valiosa colaboración.**





---

## Apéndice D

# Pautas para elaborar el proyecto final de síntesis sobre la razón de cambio

---

1. Con base en la información investigada, en particular aquellas situaciones de la vida diaria selecciona una propia de las ciencias naturales, la economía, la geometría, entre otras
2. Determina las variables relacionadas.
3. Plantea una simbolización matemática, es decir, apoyado en las expresiones algebraicas representa la situación seleccionada.
4. Realiza comparaciones entre las variables y analiza si pueden definirse aumentos y/o disminuciones.
5. Realiza un registro tabular, gráfico u otros que puedan ayudarte a sistematizar la información respecto a la situación del entorno estudiada.
6. Halla la razón de cambio y explica el significado que tiene.
7. Realiza una representación a escala para explicar a tus compañeros el proceso realizado.
8. Prepara una exposición que de cuenta de todo lo realizado en esta fase y las conclusiones obtenidas.



---

## Apéndice E

# ¡Un calor achicharrante!

---

**E**s un cuento encontrado en la web tomado de <http://www.educacioenvalores.org>, formato PDF. el 24 de Septiembre de 2007. Con este recurso los estudiantes se sensibilizaron sobre la problemática mundial relacionada con el cambio climático. Ellos haciendo uso de su competencia interpretativa respondieron preguntas sobre el cuento y ampliaron la información sobre la temática para conceptualizar sobre la variación en torno a esta circunstancia.



---

## Apéndice F

# Artículo

---

EN este Apéndice, se presenta uno de los resultados obtenidos dentro del trabajo de investigación. Este consiste en un artículo publicado en en Finlandia en el marco del “Tercer encuentro Internacional sobre Mapas Conceptuales”, realizado en la Tallinn, Estonia y publicado en las memorias del encuentro, en el 2008.

Es importante mencionar, que uno de los miembros del comité editorial del evento es el doctor Joseph D. Novak, pues es él quien lidera, los principales trabajos de investigación en la aplicación de los mapas conceptuales a nivel mundial. Lo anterior, resalta la importancia y el mérito de nuestro trabajo, que permitió validar uno de los supuestos, que es: “Dotar a los estudiantes de una herramienta que les permita, de manera organizada, poner en evidencia diversas relaciones del concepto de razón de cambio con sucesos del entorno, logrando descubrir por si mismos diferentes manifestaciones del cambio y las asocien, para establecer conexiones conceptuales que fortalezcan la comprensión del concepto objeto de estudio”



# Bibliografía

---

- [1] Artigue, M. (1998). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática, un esquema para la investigación y la innovación y la enseñanza de las matemáticas*. Universidad de los Andes, Bogotá.
- [2] Ausubel, D. P. (1980). *Psicología educativa : un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, Mexico.
- [3] Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. PhD thesis.
- [4] Bermúdez, A. y Jaramillo, R. (1997). *Comprender: ¿esa es la clave!* Revista: Alegría de enseñar, Bogotá, Colombia.
- [5] Biddle, B. et al. (2000). *La enseñanza y los profesores II. La enseñanza y sus contextos*. Paidós, Barcelona, España.
- [6] Bloom, B. et al. (1956). *Taxonomy of educational objectives: Handbook I, The cognitive domain [Taxonomía de los objetivos educativos: Tomo I, El dominio cognitivo]*. David McKay and Co, Nueva York.
- [7] Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el maestro*. Paidós.
- [8] Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, New York.
- [9] Camargo, L. y Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional*. Paidós, Bogotá D.C. Colombia.
- [10] Cantoral, R. et al. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Editorial Trillas, México.
- [11] Cortes, Z. J. (2006). La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (8).
- [12] Díaz Barriga, F. (1989). *Aprendizaje significativos y organizadores anticipados*. Programa de Publicaciones de Material Didáctico, Mexico D.F.

- 
- [13] Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2004). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. Programa de Publicaciones de Material Didáctico, Mexico, mcgraw-hill edition.
- [14] Díaz Barriga, F. y Lule, M (1986). *Destrezas académicas básicas*. Departamento de Psicología Educativa, Mexico.
- [15] Edwards, C. (1982). *The Historical Development of the Calculus*. . Editorial Springer-Verlag, New York.
- [16] Espinoza, I. (2000). *El futuro del Cálculo Infinitesimal: La problemática del profesor de matemáticas en las instituciones de enseñanza actuales*. Grupo Editorial Iberoamericana, S.A, México.
- [17] Esteban, P. (2000). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia.
- [18] Esteban, P. et al. (2004). *Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele*. The First International Conference on Concept Mapping.
- [19] Garcia, G. et al. (2002). *La aproximación. Una noción básica en el cálculo. Un estudio en la Educación Básica*. Procesos Gráficos Ltda, Bogotá.
- [20] Garcia-Pelayo, R. (1980). *Pequeño Larousse Ilustrado*. Ediciones Larousse, Rue du Montparnesse, París.
- [21] Gardner, H. (2001). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. Fondo de la cultura económica Ltda., Colombia.
- [22] Gaskins, I. y Elliot, T. (1998). *Cómo enseñar estrategias cognitivas en la escuela*. Paidós, Buenos Aires.
- [23] Gimeno, J. y Pérez, A. (1994). *Comprender y transformar la enseñanza*. Ediciones Morata.
- [24] Gonzalez, P. (2008). *Arquimedes y los orígenes del cálculo integral. Los orígenes de la matemática*. . Nivola libro y ediciones, Madrid.
- [25] Gutierrez, J. (1994). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: EL modelo de van Hiele.
- [26] Larson, R. (2006). *Cálculo*. McGraw-Hill, Mexico, octava edition.



- [27] Lombardi, G. (2004). *Escuelas que enseñan a pensar : enseñanza para la comprensión [EpC] : un marco teórico para la acción*, volume 8. Colección Educación, Buenos Aires.
- [28] Lyotard, J. (1984). *La Condición Postmoderna*. Ediciones Cátedra, Madrid.
- [29] Martin-Kniep, G. (2001). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Mexico D.F.
- [30] Mertler, C. (2001). *Designing scoring rubrics for your classroom. Practical Assessment, Research and Evaluation*. ERIC Clearinghouse.
- [31] Ministerio de Educación Nacional (1997). *Fundamentos Generales del Currículo*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.
- [32] Ministerio de Educación Nacional (2000). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá.
- [33] Ministerio de Educación Nacional (2004a). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.
- [34] Ministerio de Educación Nacional (2004b). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Serie Documentos Especiales, Bogotá. D. C. Colombia.
- [35] Novak, J. y Gowin, D. (1999). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca.
- [36] Perkins, D. (1999). *¿Qué es la comprensión? En Enseñanza para la Comprensión: Vinculación entre la teoría y la práctica*. Paídos, Argentina.
- [37] Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Tesis de Maestría, México.
- [38] Posada, M. et al. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas*. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, Medellín.
- [39] Pozo, J. y Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas como contenido procedimental de la educación obligatoria*. Santillana, Madrid.
- [40] Rapetti, M. (2003). Proporcionalidad: Razones internar y razones externar.
- [41] Recalde, L. (1999). Las concepciones sobre la matemática y experiencia. *Enseñanza Universitaria*, V.
- [42] Scher, D. (1993). *Students conceptions of the derivative across multiple representations*. Mathematics in College.
- [43] Shuell, T. (1994). Phases of meaningful learning. *Contemporary Educational Psychology*, 13.

- 
- [44] Steward, J. (1998). *Cálculo. Conceptos y contextos*. Thomson, México.
- [45] Stewart, I. (1998). *Cambio. La enseñanza agradable de las matemáticas*. Limusa Noriega Editores, México.
- [46] Stone, M. (1998). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós.
- [47] Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. PhD thesis, Universidad Real de Utrecht.
- [48] Vasco, C. (2002). *El pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. Memorias del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.
- [49] Vasco, E. y Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del model de van Hiele*. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Medellín.
- [50] Villa, J. y Posada, F. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Medellín.